

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов,
Л.А. Мельников, В.Н. Шевцов

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

**МОСКВА – ИЖЕВСК
2002**

Авторы: А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников, В.Н. Шевцов

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников, В.Н. Шевцов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник включены задачи саратовских городских физических олимпиад, предлагавшиеся ученикам выпускных классов с 1975 по 1997 годы. В большинстве своем это оригинальные задачи. Наряду с традиционными для "школьной" физики задачами о наклонных плоскостях, сталкивающихся шарах и т.д., на олимпиадах предлагались также задачи на оценки порядка величин, метод размерностей, задачи со ссылкой на результаты компьютерного моделирования. Варианты приводятся целиком, что облегчит школьникам подготовку к олимпиадам. При этом читатели должны иметь в виду, что на олимпиаде не разрешается пользоваться какой-либо литературой.

В 70-е годы олимпиады проходили в дни зимних каникул, а затем традиционным временем их проведения стал декабрь. Поэтому, чтобы избежать путаницы, датировка олимпиад приведена по началу учебного года.

Отметим благожелательную поддержку и полезную критику со стороны Е.И. Прилуцкого, который был большим энтузиастом олимпиад школьников. Авторы хотели бы выразить благодарность доцентам Саратовского госуниверситета А.С. Шаповалову, Б.С. Дмитриеву, Ю.И. Левину,

возглавлявшим в разные годы оргкомитет по проведению олимпиад. Их конструктивная критика, заинтересованность и помощь были всегда полезны. Авторы также благодарны В.Л. Дербову, А.А. Князеву, А.И. Жбанову, А.Г. Рожневу, Г.Н. Татаркову, С.Б. Венигу, М.М. Стольницу, А.Б. Осину, всем членам оргкомитета за увлекательные дискуссии, в ходе которых часто рождались идеи задач.

1975 год

1. Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин 3 и 9 мм, длины 1 и 7 см, диаметры проволок 0,2 и 0,6 мм. Коэффициент жесткости первой пружины 14 Н/м. Найдите коэффициент жесткости второй пружины.

2. Определите сжатие Юпитера у полюсов $\Delta r/r_0$ (Δr - разность экваториального и полярного радиусов), если известно, что средний радиус Юпитера $r_0 = 70000$ км, ускорение свободного падения у поверхности $g = 20$ м/с², время обращения вокруг оси T равно 10 часам. Считайте для простоты, что основная часть массы планеты сосредоточена в компактном центральном ядре.

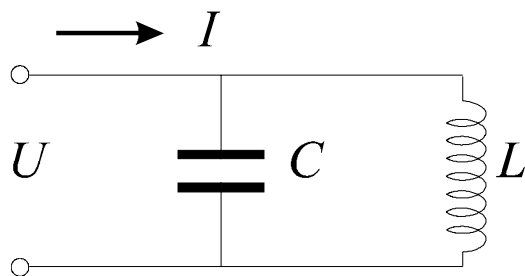


Рис. 1

3. К цепи, показанной на рис. 1, приложено напряжение, изменяющееся во времени по закону

$$U = A(1 + \alpha \cos \Omega t) \cos \omega t.$$

Найдите ток в цепи I .

4. Объясните, почему часто близорукие люди наклоняют очки, а дальновзоркие - сдвигают очки на нос? В каком случае надо было бы поступать наоборот?

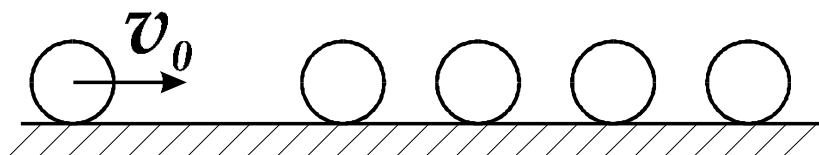


Рис. 2

5. На гладкой поверхности лежат 4 свинцовых шара (рис. 2). На них слева налетает шар со скоростью v_0 . Все шары одинаковы, центры шаров лежат на одной прямой. Найдите скорость правого шара после всех соударений.

1976 год

1. Почему, спускаясь по канату "на руках", можно обжечься? Какое количество теплоты может выделиться, если высота каната $h = 5$ м, а масса человека $m = 70$ кг?

2. Построить вольт - амперную характеристику (т.е. зависимость силы тока I от напряжения U , которое может быть как положительным, так и отрица-

тельным) схемы, показанной на рис. 3. Внутренним сопротивлением диодов и источников пренебречь.

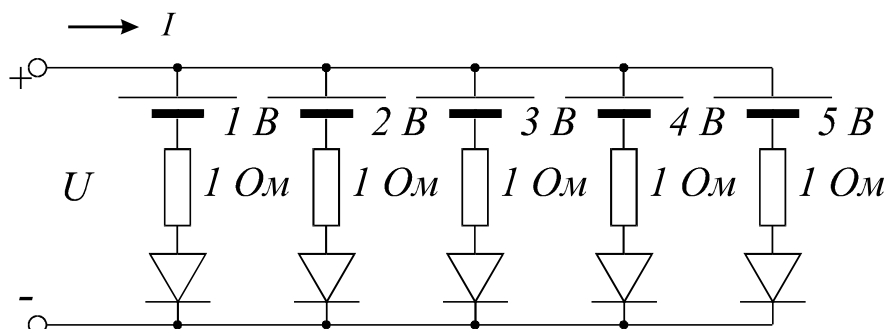


Рис. 3

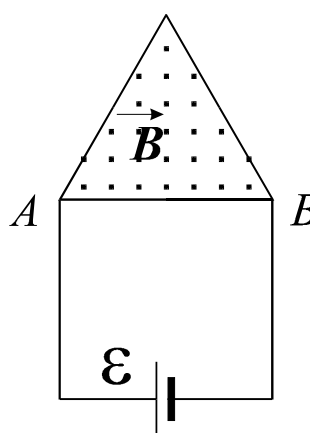


Рис. 4

3. В однородное магнитное поле с индукцией B помещена фигура в виде тонкой металлической пластинки толщины d . Пластика имеет форму равнобедренного треугольника со стороной l ($l \gg d$). Плотность материала ρ . К вершинам A и B треугольника (рис. 4) с помощью длинных и мягких проводов подключен источник ЭДС с внутренним сопротивлением R_0 . Найдите ускорение пластинки. Массой и сопротивлением подводящих проводов, а также сопротивлением пластинки пренебречь. Плоскость фигуры перпендикулярна магнитному полю.

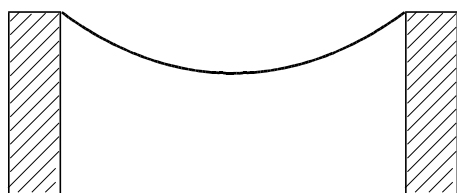


Рис. 5

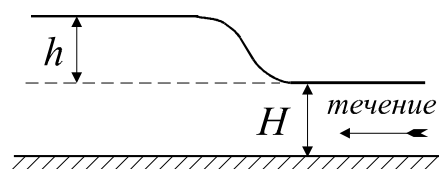


Рис. 6

4. Цепочка массы $M = 10$ г свободно подвешена за концы (см. рис. 5). Найдите максимальную силу натяжения в цепочке.

5. На некоторых реках недалеко от устья во время прилива наблюдается **бор** - волна, представляющая собой резкое повышение уровня воды (см. рис 6). Определите скорость движения бора, считая, что его форма не меняется со временем. Высота бора $h = 1,5$ м, глубина реки $H = 3$ м, скорость течения $v = 1$ м/с.

1977 год

1. Имеются две пружины с одинаковыми упругими свойствами. Все размеры пружин одинаковы; масса же первой пружины больше, чем масса второй ($m_1 > m_2$). Обе пружины подвешены в поле тяжести (см. рис. 7). К концу второй пружины прикреплен груз, масса которого равна разности масс пружин. Какая из пружин растянута на большую длину?

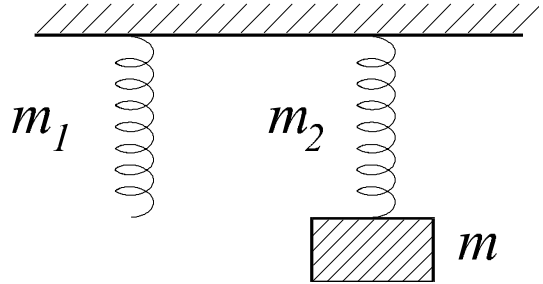


Рис. 7

Ответ обоснуйте.

2. Металлический полый шар массы M заполнен резиной массы $m = M/4$. Два таких шара, двигаясь в невесомости навстречу друг другу с равными скоростями v , испытали центральное столкновение. Найдите установившуюся скорость разлета шаров. Известно, что незаполненные шары сталкивались упруго. Скорость звука в резине значительно меньше, чем в металле.

3. Оказалось, что температура воздуха в некоторой местности в безветренный пасмурный день может быть описана зависимостью $T(^{\circ}\text{C}) = 20 + 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi t / 24 + \varphi)$, где t - время в часах, φ - постоянная. Определите, когда достигается максимальная температура воды, равная 25°C , в небольшом пруду, расположенном в той же местности. Температура воздуха максимальна в 15 часов.

4. В невесомости в состоянии покоя находится гантелька, которая состоит из двух маленьких одинаковых массивных шаров, скрепленных нерастяжимым стержнем длины l , массой которого можно пренебречь. Шары несут заряды $+q$ и $-q$. В пространстве скачком создают однородное электрическое поле. Какова должна быть напряженность этого поля, чтобы а) гантелька наверняка осталась целой? б) наверняка разорвалась? Первоначальная ориентация гантельки неизвестна. Стержень рвется, если сила его натяжения больше величины F .

5. На наклонной плоскости с сухим трением вбит гвоздь, к которому прикреплен маятник (см. рис. 8). Первоначально нить параллельна ребру наклонной плоскости.

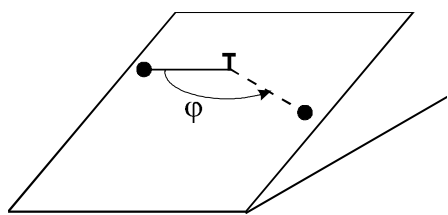


Рис. 8

Затем маятник отпускают без начальной скорости. Возможно ли, чтобы маятник остановился и остался под углом: а) $\varphi_1 = \pi/2 + \pi/6$, б) $\varphi_2 = \pi/2 + \pi/12$ к первоначальному положению нити сразу после первого полукачания? Маятник может лишь скользить по плоскости.

Маятник может лишь скользить по плоскости.

1978 год

1. К концу пружины подвешены два одинаковых груза массы m каждый, соединенные нитью (рис. 9). В некоторый момент нить пережигают. Найдите амплитуду колебаний верхнего груза. Коэффициент жесткости пружины k , массами пружин и нити можно пренебречь.

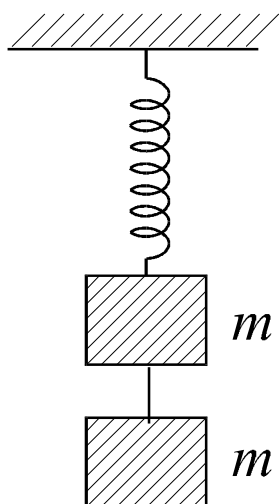


Рис. 9

2. При испытании новой модели электрического чайника (рис. 10) оказалось, что вода нагревается почти до 100°C , но все же не закипает. Чайник рассчитан на мощность нагревателя P и напряжение 110 В . Тогда чайник подключили к сети 220 В . За какое время чайник выкипит наполовину? Масса воды в чайнике M . Теплота парообразования воды λ . Крышка чайника плотно закрывается. Чайник изготовлен из металла.

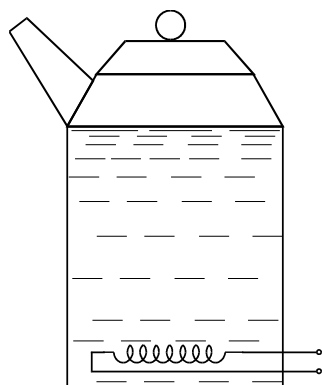


Рис. 10

3. Сняты зависимости напряжения на нити вакуумной лампы накаливания и температуры нити от времени (рис. 11). Запись температуры была прекращена к моменту подачи второго импульса напряжения. Восстановите недостающую часть графика и найдите максимальную температуру нити на этом участке.

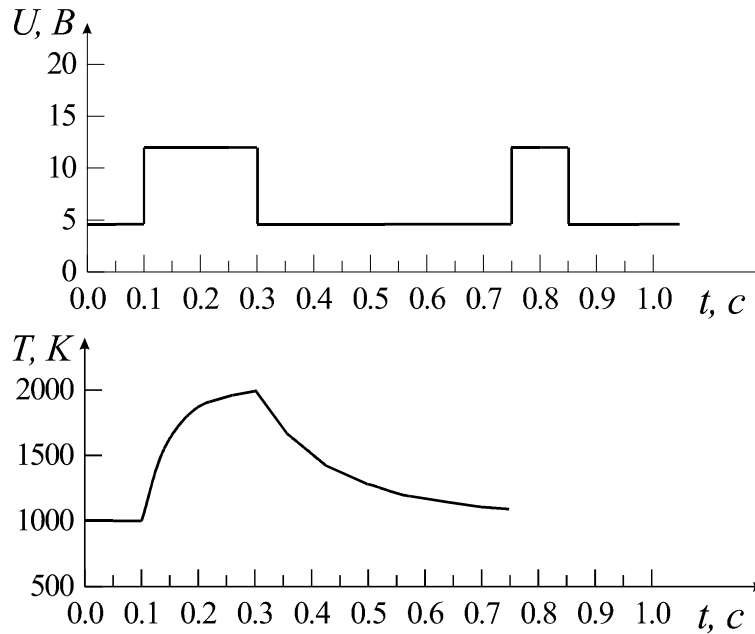


Рис. 11

4. Имеется теплоизолированный сосуд сложной формы (рис. 12), заполненный неоном при давлении P и температуре T . Трубка объемом V соединена небольшим отверстием с так называемым балластным объемом. Через трубку пропускают кратковременный импульс тока длительностью τ . Сила тока I , напряжение U . Для газа в разрядной трубке найдите: а) максимальную температуру, б) температуру в момент, когда давление в трубке и в балластном объеме сравняются. Величина балластного объема намного превышает объем трубки. Известно, что при адиабатическом процессе величина T^5/p^2 остается постоянной.

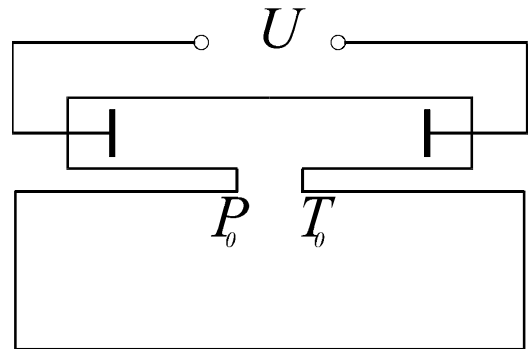


Рис. 12

5. С самолета проводят серию бомбометаний. Бомба снабжена парашютом, раскрывающимся автоматически на определенной высоте. Бомба каждый раз сбрасывается над точкой O (рис. 13). Если самолет летит по ветру, то бомба падает на расстоянии a_1 от точки O , если против ветра - то на расстоянии a_2 . Найдите координаты точки падения бомбы в случае, когда траектория самолета совпадает с осью x . Скорость

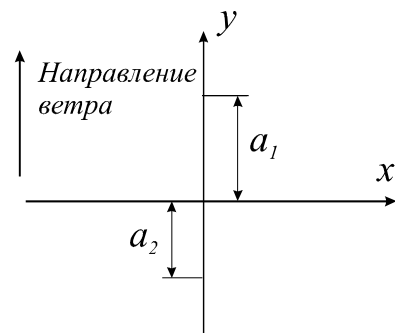


Рис. 13

ветра v , скорость самолета в неподвижном воздухе V .

1979 год

1. Пустая бутылка емкостью 0,5 литра весит 450 граммов. Найдите плотность стекла, если известно, что погруженная в воду бутылка тонет, будучи наполнена водой более чем на половину.

2. Предлагается тепловая машина, работающая на использовании суточного перепада температур. Проектная мощность машины 10 л.с. (1 л.с. = 736 Вт). Оцените массу воды, которую понадобится использовать в качестве теплового резервуара. Исходя из результата, объясните, почему такие машины не нашли широкого применения.

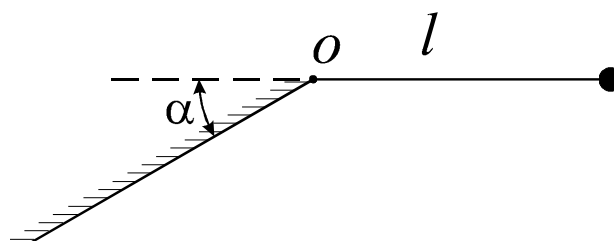


Рис. 14

3. Маятник отклонили на угол $\pi/2$ от вертикали и отпустили. При этом он вернулся в исходное положение через время t_1 . Когда же на пути маятника поставили стенку, как показано на рис.14, время возвращения в исходное положение составило t_2 .

Найдите угол α , если известно, что

он мал. Удар о стенку мгновенный и абсолютно упругий. Длина нити l .

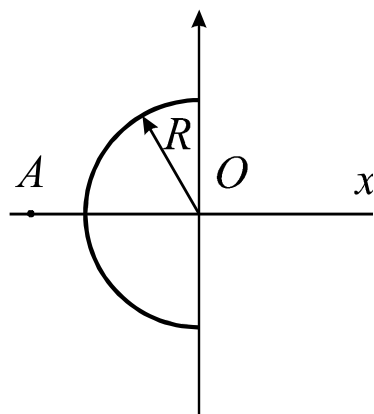


Рис. 15

4. По поверхности полусферы (рис. 15) равномерно распределен электрический заряд. В таблице приведена рассчитанная на компьютере зависимость потенциала от расстояния вдоль оси x при $x > 0$. Найдите потенциал в точке A ($OA = 1,5R$). Начало координат совпадает с центром

x/R	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
φ	100	76,4	58,6	46,5	38,2	32,3	27,6

полусферы.

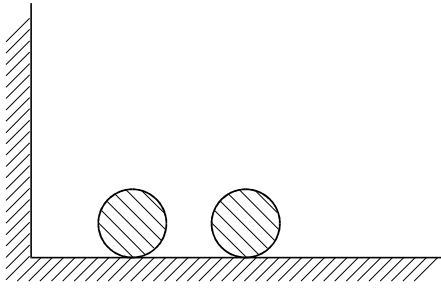


Рис. 16

5. Шарам, расположенным как показано на рис. 16, сообщили некоторые скорости, причем правому - скорость V_0 , направленную направо. Шары столкнулись 10 раз и больше не сталкивались. Найдите изменение скорости правого шара. Все удары абсолютно упругие и центральные, трение отсутствует. Правый шар массивней левого в 2000 раз.

1980 год

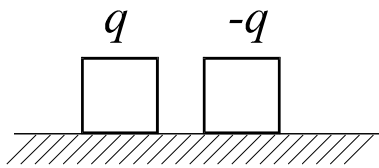


Рис. 17

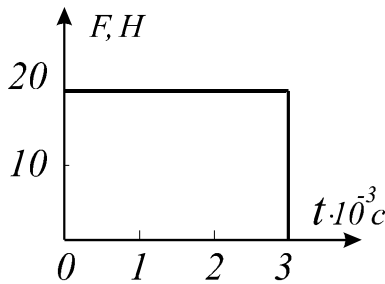


Рис. 18

1. На абсолютно гладкой непроводящей поверхности удерживают два металлических кубика (рис. 17). На один кубик помещен положительный заряд $+q$, на другой - отрицательный $-q$. Кубики отпускают. Через какое время они столкнутся? Расстояние между кубиками h много меньше стороны кубика a . Плотность материала ρ .

2. Шарик массы $m = 100 \text{ г}$ может колебаться на пружине с частотой 2 Гц. Система находится в покое. Затем на шарик начинает действовать сила, зависящая от времени, как показано на рис.

18. Найдите амплитуду колебаний шарика.

3. На столе в один ряд лежат 10 кубиков. С какой силой нужно, взявшись за два крайних руками, сдавить кубики, чтобы оторвать их от стола? Массы кубиков m , коэффициент трения кубика о кубик k .

4. Имеется сосуд тороидальной формы, в котором находятся два поршня массы m каждый (рис. 19). Один из поршней начинают двигать со скоростью v , а затем через достаточно большой промежуток времени останавливают. Найдите изменение давления газа в сосуде. Первоначальное давление газа p_0 . Суммарная масса газа M . Сосуд теплоизолирован. Трение отсутствует.

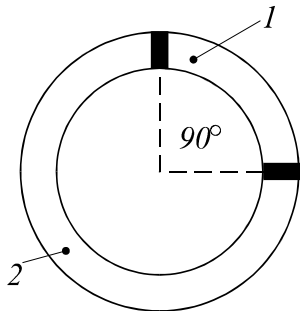


Рис. 19

5. Известно, что максимальная высота гор на

Земле около 10 км. Оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют шарообразную форму. Считайте, что астероид сложен из тех же пород, что и Земля.

1981 год

1. Тонкий диэлектрический стержень, на концах которого укреплены два разноименно заряженных шарика, помещен в однородное электрическое поле напряженности E параллельно его силовым линиям. Какую работу надо затратить, чтобы повернуть стержень с шариком на 180° ? Длина стержня l , заряд каждого шарика q .

2. На бесконечной плоской поверхности, наклоненной под углом к горизонту, покоится кубик, масса которого равна M , а коэффициент трения о поверхность составляет k . Скользя по плоскости, сверху на него налетает другой кубик, движущийся без трения (рис. 20). При каких значениях массы второго кубика первый будет спускаться по наклонной плоскости неограниченно далеко? Удар кубиков упругий.

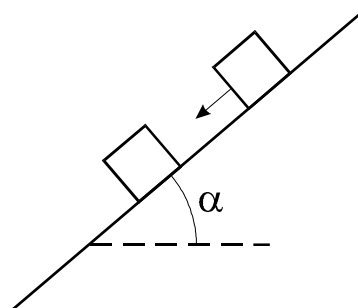


Рис. 20

3. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты h , изготовленный из металла. Сначала в него опускают один поршень, через большой промежуток времени - второй и так далее - всего 10 поршней. Найдите расстояние между первым и вторым поршнем. Масса каждого поршня и атмосферное давление p_0 связаны соотношением $mg = p_0 S$, где S - площадь сечения цилиндра. Толщина поршней мала по сравнению с высотой сосуда. Трение мало.

4. Горизонтально расположенный плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U . Около верхней пластины удерживают с помощью магнита маленький железный шарик (рис. 21), затем магнит быстро убирают. Если $U > U_0$, то шарик начинает прыгать внутри конденсатора, попеременно касаясь обеих пластин. Найдите период колебаний ша-

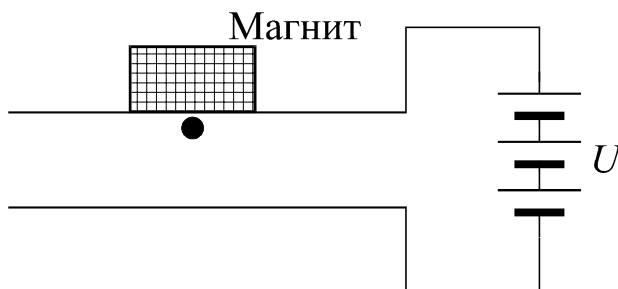


Рис. 21

рика при $U = \sqrt{3} U_0$. Известно, что при $U = 0$ высота каждого последующего подпрыгивания шарика уменьшается в 2 раза. Пластины изготовлены из немагнитного проводящего материала, расстояние между ними h . Удар шарика о верхнюю пластину абсолютно упругий.

5. В невесомости покоится заряженное кольцо. Из бесконечности через него пускают другое кольцо меньшего радиуса с той же массой и несущее такой же заряд. Оказалось, что малое кольцо пролетает через большое, если начальная скорость малого кольца превышает величину v_0 . Какими будут скорости колец в момент пролета малого через большое, если начальная скорость малого кольца равна $2v_0$? Плоскости колец перпендикулярны оси движения.

1982 год

1. Имеются три шарика одинакового объема (рис. 22). Один изготовлен из

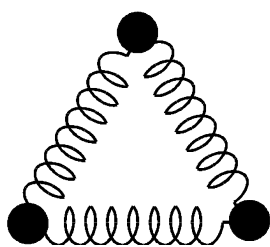


Рис. 22

материала с плотностью 2 г/см^3 , а два других - из материала с плотностью $0,5\text{ г/см}^3$. Шарика соединили тремя одинаковыми пружинами и бросили в воду. Какую форму примет конструкция? (Укажите углы треугольника.) Масса и объем пружин пренебрежимо малы. Объем каждого шарика $V = 1\text{ см}^3$, жесткость пружин $k = 0,2\text{ Н/м}$.

Длина нерастянутых пружин 10 см.

2. В плоский конденсатор помещен легкий стержень длиной l , на концах которого находятся два точечных заряда $+q$ и $-q$ (рис. 23а). Стержень может

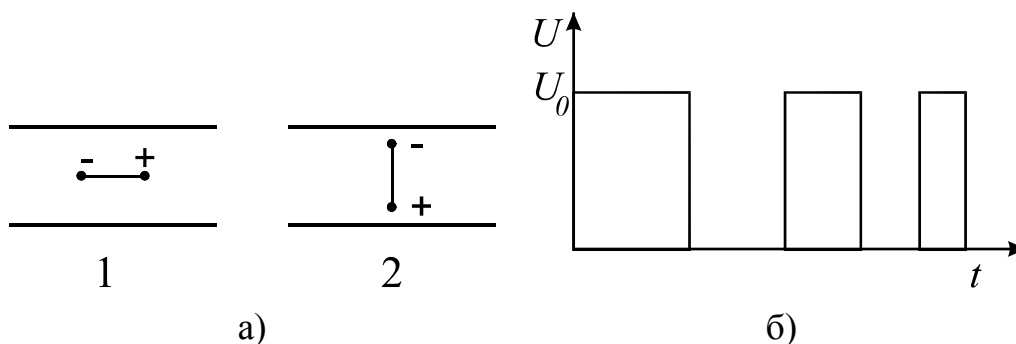


Рис. 23

без трения вращаться вокруг оси, проходящей через его середину. На пластины конденсатора подали напряжение, зависимость которого от времени показана на рис. 23б. Импульсы включаются, когда стержень находится в положении 1, и выключаются, когда он находится в положении 2. Найдите длительность пауз между 9 и 10 импульсами. Расстояние между пластинами d . Масса каждого шарика m .

3. Из точки O (рис. 24) отпустили без начальной скорости шарик. Он ударяется сначала об одну, затем о вторую, потом снова о первую плоскость и летит вверх точно по линии OA . Найдите высоту h . Известно, что $l = 9$ см. Все удары абсолютно упругие.

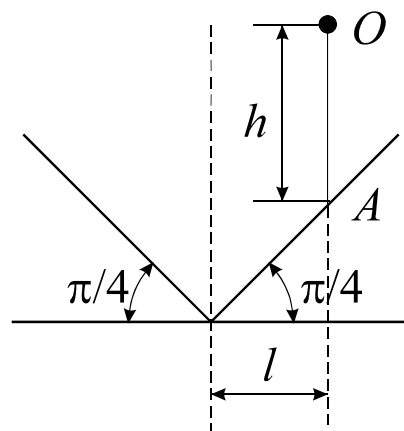


Рис. 24

4. Внутри сосуда тороидальной формы закреплены симметричным образом три поршня a , b , c . В образованных поршнями отсеках сосуда находятся газы трех сортов: A , B и C (рис. 25). Каждый поршень проницаем для газа, обозначенного той же буквой, и непроницаем для двух других газов. Крепления поршней убирают. Найдите относительное расположение поршней после их остановки. Полное количество газа A - 1 моль, газа B - 2 моля, газа C - 3 моля. Опыт проводится при постоянной температуре.

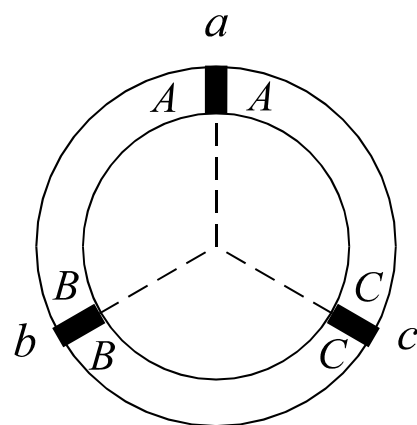


Рис. 25

5. На боковой поверхности трубы (рис. 26) равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ . По оси трубы может двигаться шарик массы m , несущий отрицательный заряд $-q$. Найдите период малых колебаний шарика возле середины трубы. Длина трубы l намного больше ее диаметра d .

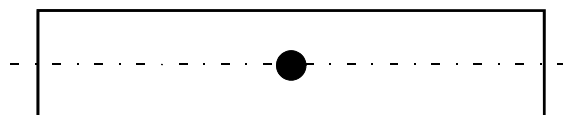


Рис. 26

Длина трубы l намного больше ее диаметра d .

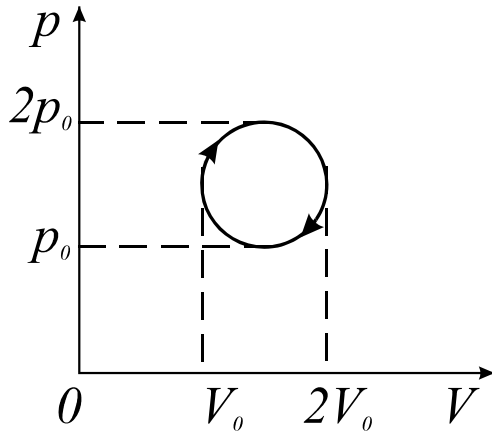
1983 год

Рис. 27

1. С одним молем идеального газа совершают цикл, который на pV диаграмме изображается окружностью (рис. 27). Найдите максимальную температуру газа.

2. Если мяч опустить в реку, то через 3 минуты он совершит полный оборот вокруг своей оси (рис. 28), пройдя при этом по течению 50 метров. Оцените глубину реки.

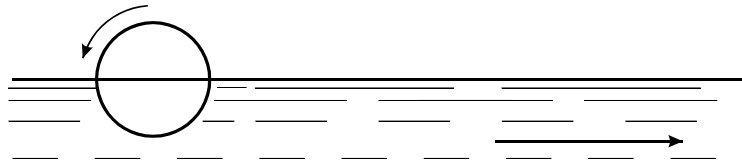


Рис. 28

Волны и ветер отсутствуют. Мяч погружен в воду наполовину.

3. Оцените ширину бороздки современной долгоиграющей пластинки.

4. На две близко расположенные металлические сетки подано переменное

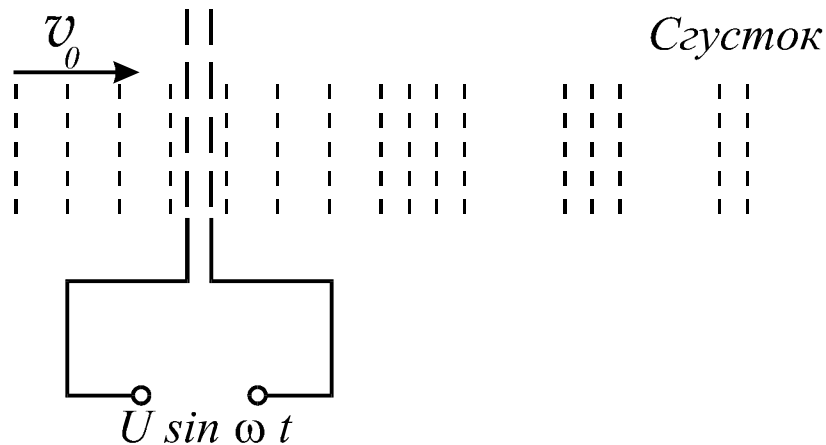


Рис. 29

напряжение с амплитудой U и частотой ω . Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов. Оказалось, что за сетками электроны собираются в компактные сгустки (рис. 29). Оцените расстояние от сеток, на котором образуются сгустки. Считайте, что амплитуда U мала ($eU \ll mv^2/2$), кулоновским расталкиванием электронов можно пренебречь.

5. На кольцевой автостраде установлены 4 светофора (рис. 30). С какой максимальной скоростью может равномерно двигаться по кольцу автомобиль так, чтобы не останавливаться перед светофорами? Все светофоры одновременно дают зеленый свет в течение 20 с, потом красный в течение 20 с, затем вновь зеленый и так далее. Автомобиль начинает двигаться в момент, когда зажигается зеленый свет. Считайте, что автомобиль мгновенно набирает скорость, и далее она остается постоянной.

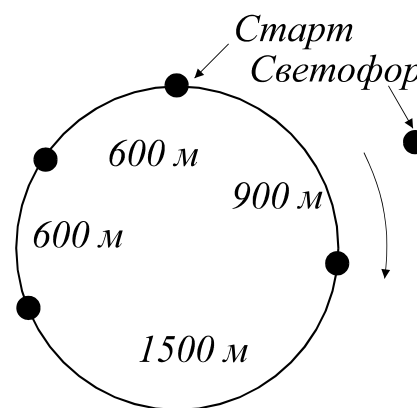


Рис. 30

1984 год

1. Оцените количество теплоты, выделяющееся при экстренном торможении современного грузового железнодорожного состава.
2. Почему нельзя изготовить воздушный шар, наполняемый нагретым воздухом, подъемная сила которого равнялась бы подъемной силе шара того же объема, наполненного водородом?

3. Нарисуйте качественно с указанием масштаба по осям координат зависимость величины электрического поля, создаваемого диском, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 3,54 \cdot 10^{-11}$ Кл, от расстояния до диска вдоль оси Ox . Радиус диска $r = 1$ м, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл/В м. Ось Ox перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр (рис. 31).

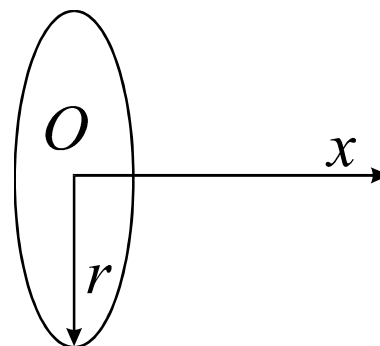


Рис. 31

4. На гладкой горизонтальной поверхности установлены 17 шаров (рис. 32), причем масса каждого последующего в 3 раза меньше массы предыдущего. Самому массивному шару сообщают скорость v_0 . Найдите скорость самого легкого шара после всех соударений. Все удары центральные и абсолютно упругие.

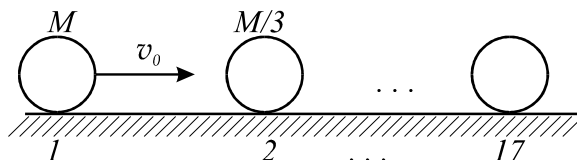


Рис. 32

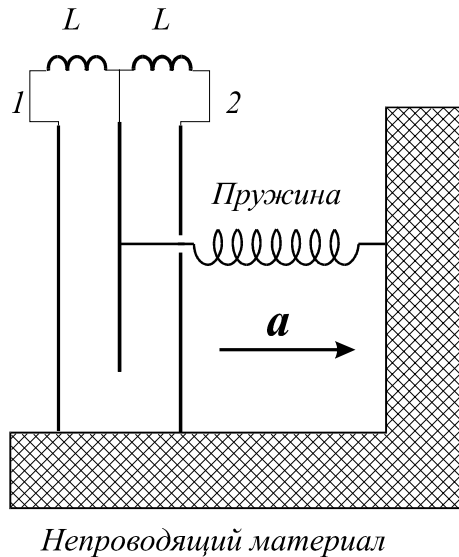


Рис. 33

5. Прибор для измерения ускорения содержит три металлические пластины - две неподвижные и одну подвижную, прикрепленную к пружине. Пластины соединены легкими гибкими проводами с двумя катушками индуктивности L , как показано на рис. 33. При движении прибора с некоторым ускорением были измерены собственные частоты электрических контуров 1 и 2. Отношение частот оказалось равным 1,05. Найдите величину ускорения. Жесткость пружины $k = 100$ Н/м, масса подвижной пластины $M = 1$ г. В покое подвижная пластина расположена

не на расстоянии 0,5 мм от каждой из неподвижных пластин, а на расстоянии 0,5 мм от каждой

1985 год

1. На рисунке 34 показана стробоскопическая фотография шарика, брошенного под углом к горизонту из начала координат. Найдите начальную скорость шарика.

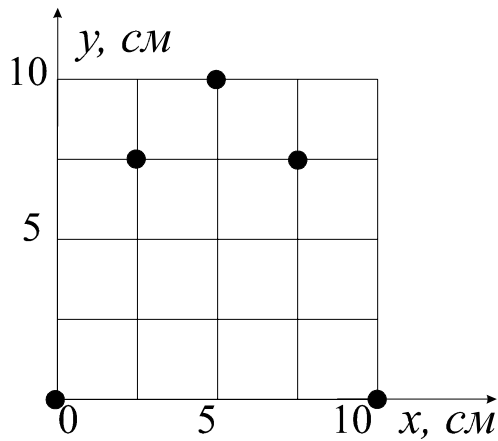


Рис. 34

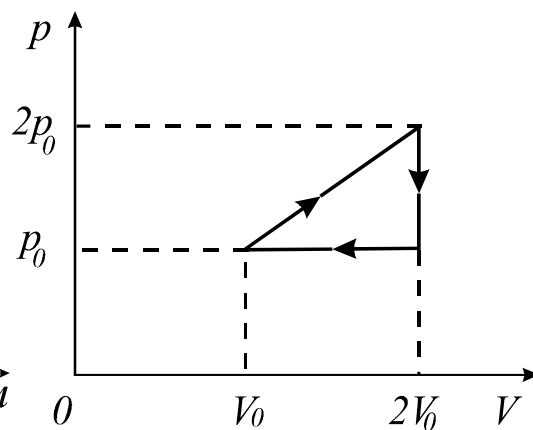


Рис. 35

2. С некоторым объемом идеального газа осуществляется цикл, показанный на рисунке 35. Минимальная температура газа, достигаемая при выполнении цикла, равна T_{min} . Какой объем занимает газ, когда его температура при выполнении цикла станет равной $2T_{min}$?

3. Известно, что шарик для настольного тенниса, брошенный без начальной скорости с высоты H на неподвижную ракетку, подпрыгивает на высоту $0,64H$. Играя таким шариком, мальчик периодически отбивает его ракеткой вверх так, что после каждого удара шарик подпрыгивает на высоту $h = 0,9$ м. Найдите скорость движения ракетки в момент каждого удара. Масса ракетки много больше массы шарика.

4. Точечный заряд q помещен в центр сферы, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q . В сфере вырезают маленькое отверстие радиуса r . Найдите силу, действующую на точечный заряд. Радиус сферы R .

5. Маленькому шарiku, лежащему на краю лестницы, сообщили некоторую горизонтальную скорость (рис.36).

Через 0,3 секунды шарик ударился о первую ступеньку лестницы, а еще через 0,4 секунды - о вторую. Затем опыт повторили снова, но начальную скорость шарика удвоили. Стукнется шарик о сороковую ступеньку лестницы или нет? Высота ступенек равна их ширине. Удар шарика о ступеньку абсолютно неупругий, трение отсутствует.

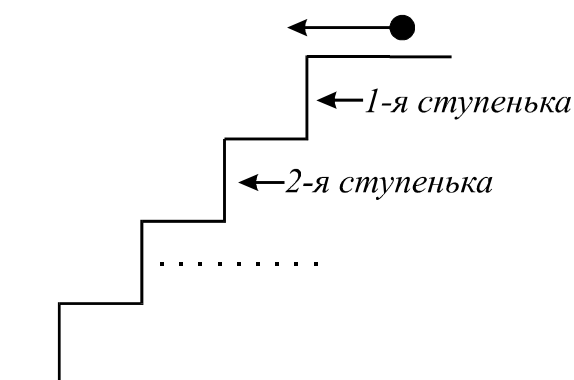


Рис. 36

1986 год

1. В некотором доме стенки, крыша и пол изготовлены из полностью теплоизолирующих материалов. Теплопроводящими являются только двери. В комнате установлена печь (рис. 37), выделяющая постоянную мощность

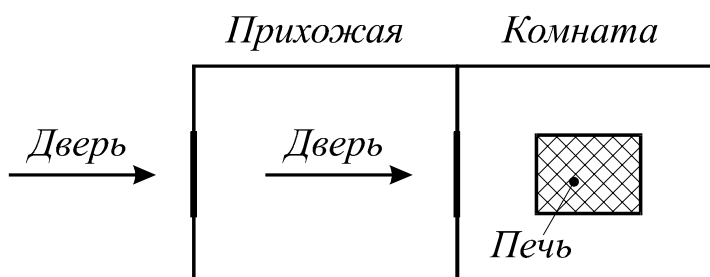


Рис. 37

P . Если дверь между комнатой и прихожей открыта, а на улицу закрыта, то по всему дому устанавливается температура $T = 8^\circ\text{C}$. Какая температура установится в комнате и прихожей, если закрыть обе двери? Температура воздуха на улице $T_0 = -10^\circ\text{C}$.

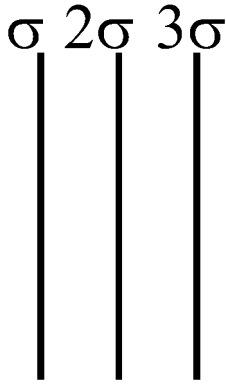


Рис. 38

2. Три листа несут положительный заряд с поверхностной плотностью, σ , 2σ , 3σ соответственно (рис. 38). Листы предоставили сами себе. С какими ускорениями они будут разлетаться? Масса единицы площади каждого листа ρ . Расстояние между листами много меньше их размеров.

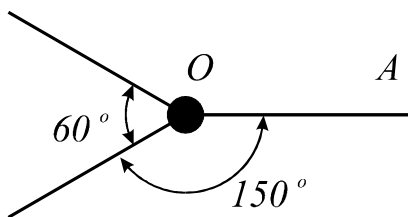


Рис. 39

3. На шар массы m , находящийся в покое в точке O , налетает другой шар той же массы, движущийся со скоростью v_0 . На рисунке 39 показаны траектории шаров до и после удара. Какое количество теплоты выделится при ударе?

4. Из резинового шнура длины l и массы m с коэффициентом жесткости k изготовили кольцо, которое вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра. Найдите радиус кольца.

5. Если на наклонную плоскость положить карандаш так, как показано на

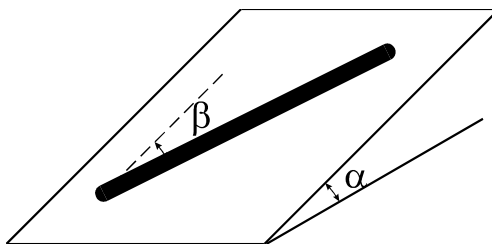


Рис. 40

рисунке 40, то он начинает катиться без проскальзывания, если угол β больше 60° . Найдите угол α . Карандаш в сечении представляет собой правильный шестиугольник.

1987 год

1. Лиана выдерживает двух обезьян, висящих на ее конце. Выдержит ли лиана, если одна обезьяна начнет раскачиваться на ней с отклонением от вертикали 45° ?

2. С идеальным газом совершают процесс, показанный на рисунке на pV -диаграмме (рис. 41). Получает или отдает газ тепло при прохождении точек, в которых являются минимальными:
а) давление, б) температура, в) объем?

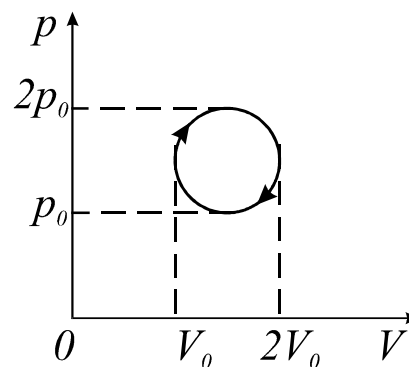


Рис. 41

3. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 42). Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Нарисуйте график зависимости периода колебаний от начальной скорости v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие.

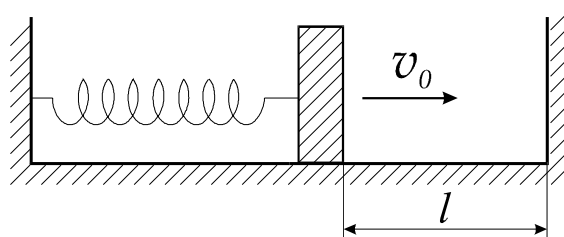


Рис. 42

4. Две одинаковые шайбы массы M каждая скреплены невесомой пружиной и лежат на плоскости. Коэффициент трения между шайбами и плоскостью равен k , а трение пружины о плоскость отсутствует. Плоскость начинают медленно наклонять так, что пружина сохраняет горизонтальное расположение. При каком угле наклона плоскости к горизонту шайбы начнут скользить по ней? Первоначальная сила натяжения пружины T_0 .

5. По дуге в одну четверть окружности равномерно распределен некоторый заряд q (рис. 43а). При этом в точке A вектор электрического поля имеет составляющие $E_x=4,41$ В/м, $E_y=12,28$ В/м, а в точке B $E_x=0,91$ В/м, $E_y=-3,25$ В/м. Найдите составляющие вектора электрического поля в точке C в случае, показанном на

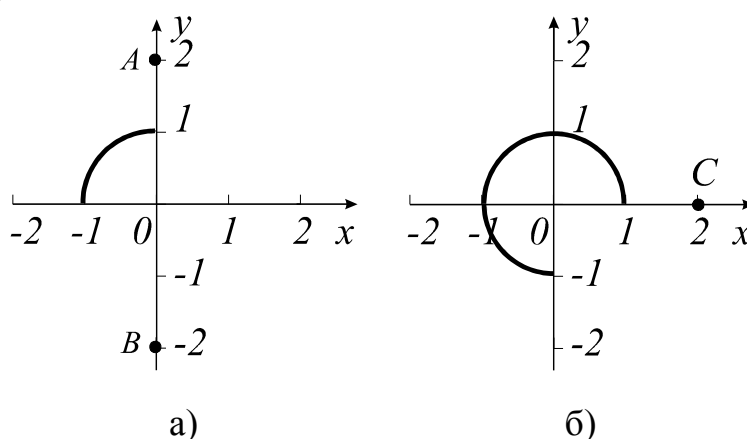


Рис. 43

рис. 43б, когда тот же самый заряд q распределен по дуге в три четверти окружности.

1988 год

1. На гладкой горизонтальной поверхности лежит мишень массы 9 кг. С интервалом в $\tau = 1$ с в нее попадают и застревают 4 пули, первая из которых летит с юга, вторая - с запада, третья - с севера и четвертая с востока. На сколько и в какую сторону сместится в итоге мишень? Масса каждой пули 9 г, скорость $v = 200$ м/с.

2. Вокруг звезды "Икс" вращаются две планеты массы $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг каждая, состоящие из несжимаемой жидкости плотности $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Одна из планет электрически нейтральна, а по объему второй равномерно распределен электрический заряд $Q = 10000$ Кл. Найдите отношение давлений в центре планет.

3. На вход показанной на рисунке 44 бесконечной цепочки из одинаковых

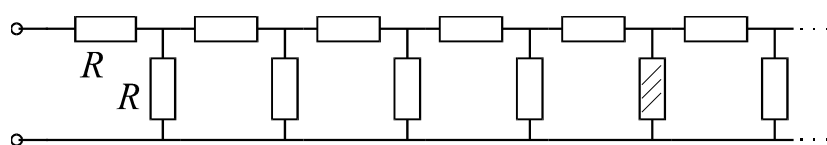
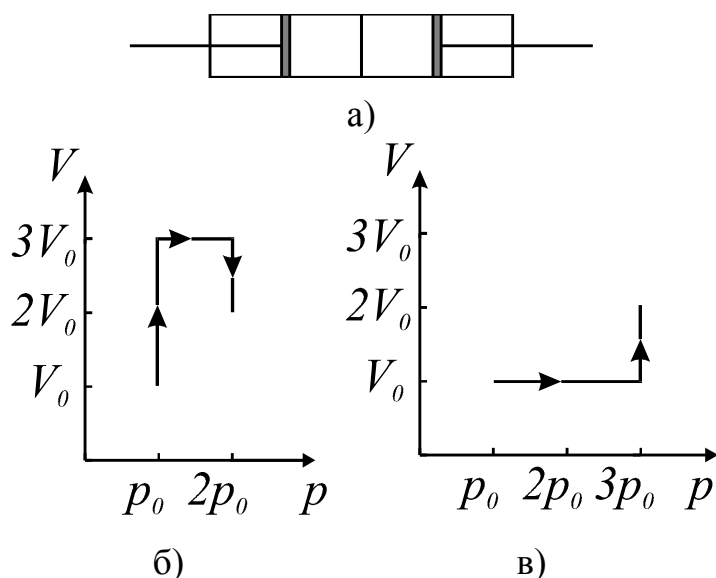


Рис. 44

сопротивлений $R = 1$ Ом подано напряжение $U = 1$ В. Найдите ток через сопротивление, показанное штриховкой.

кой.

4. Цилиндрический сосуд разделен перегородкой на две части, в каждой



части содержится по 1 моль идеального одноатомного газа, занимающего объем V_0 при давлении p_0 (рис. 45а). С газом, находящимся слева от перегородки, проводят процесс, изображенный на pV диаграмме на рис. 45б, а с газом, находящимся справа - на рис. 45в. После этого сосуд изолируют от окружающей среды, а перегородку

Рис. 45

убирают. Найдите установившееся давление газа в сосуде.

5. На горизонтальной поверхности лежат два грузика с массами $m_1 = 70$ г и $m_2 = 120$ г. (рис. 46) Некто с помощью рычага пытается сдвинуть их с места. Какой груз начнет двигаться первым? Длина рычага 30 см, расстояние $l = 20$ см. Массой рычага пренебречь.

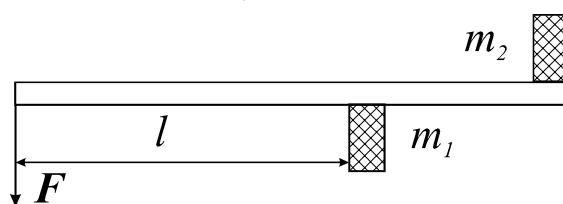


Рис. 46

1989 год

1. Наблюдая Землю, марсианский астроном видит, что Солнцем освещена ровно половина видимого диска. Найдите расстояние от Марса до Земли, если известно, что Земля и Марс находятся на расстоянии 147 и 245 миллионов километров от Солнца.

2. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 из пушки, находящейся на поверхности земли, разорвался на два одинаковых осколка. Один из них полетел вертикально вверх, а второй - горизонтально, оба со скоростями $v_0/2$. На какой высоте произошел взрыв?

3. На горизонтальной поверхности лежат один на другом три одинаковых кирпича (рис. 47). Среднему кирпичу сообщили толчком скорость $v = 1$ м/с. Найдите смещение кирпичей по отношению друг к другу, когда прекратится их относительное движение. Коэффициент трения между кирпичами $k = 0,4$; трение между нижним кирпичом и поверхностью отсутствует.

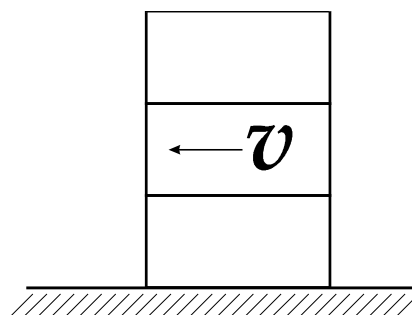


Рис. 47

4. В таблице приведены рассчитанные на компьютере значения напряжен-

x	0,1 см	0,25 см	0,5 см	1 см	1,5 см	2 см	3 м
E , В/м	100,863 5	18,0659	7,6039	6,0110	5,8020	5,6405	0,013565 7

ности электрического поля E , создаваемого квадратной решеткой (рис. 48) из

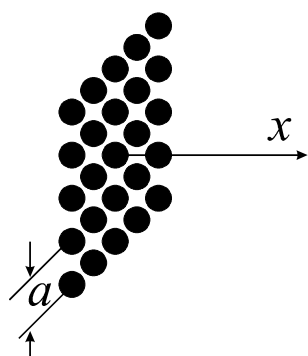


Рис. 48

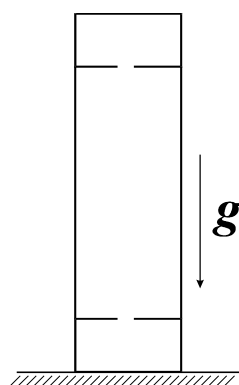


Рис. 49

$N \times N$ точечных зарядов, в зависимости от координаты x . Определите величины точечных зарядов, шаг решетки a , число N . Ось x перпендикулярна к решетке и проходит через ее центр.

5. В верхней и нижней частях высокой пустотелой колонны отделены перегородками два отсека, высота каждого 120 см. Отсеки соединены с основной частью маленькими отверстиями (рис. 89.5). Стенки колонны поддерживаются при некоторой постоянной температуре. Внутри колонны находится одна молекула массы $1,4 \cdot 10^{-22}$ г. При компьютерном моделировании ее движения оказалось, что в нижнем отсеке она проводит $1/1900$, а в верхнем $1/2000$ часть времени. Найдите температуру стенок.

1990 год

1. На горизонтальную поверхность нанесли покрытие так, что коэффициент трения маленького кубика об эту поверхность зависит от координаты x , как

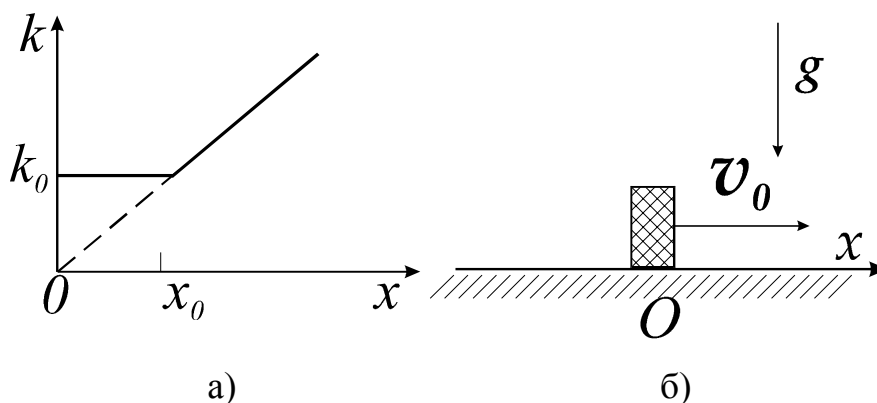


Рис. 50

показано на рис. 50а. Кубику ударом сообщают скорость v_0 (рис. 50б). Найдите положение кубика относительно точки O через достаточно большой промежуток времени.

2. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту $h/2$. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45° к горизонту?
3. Внутри полого шара массы M с внутренним радиусом 5 см находится маленький шарик массы $M/10$. Снаружи на большой шар налетает еще один маленький шарик массы $M/10$ со скоростью 2 м/с . Найдите период колебаний малого шара внутри большого, которые возникнут в итоге. Все удары центральные и абсолютно упругие. Опыт проводится в невесомости.
4. Внутри сосуда объема V помещена резиновая оболочка объема $V/4$. И сосуд, и оболочка заполнены идеальным газом. В начальном состоянии температура газа T_0 и оболочка не растянута. Когда газ внутри оболочки нагрели до температуры T_1 , сохраняя температуру остального газа неизменной, оболочка раздулась, и ее объем увеличился вдвое. До какой температуры нужно охладить газ в сосуде, поддерживая температуру T_0 внутри оболочки, чтобы она раздулась до тех же размеров? Считать, что упругие свойства оболочки не зависят от температуры.
5. Из вершин правильного шестиугольника со стороной 1 м одновременно пускают по направлению к центру шесть одинаковых заряженных частиц. Начальная скорость частиц 1 м/с . Когда расстояние между частицами уменьшилось в два раза, то скорость каждой также уменьшилась вдвое. До какого минимального расстояния сблизятся частицы?

1992 год

1. При проведении процесса, изображенного на pV диаграмме (см. рис. 51), газ водород совершил работу 5 МДж при постоянном давлении и температуре. Определите величину изменения массы газа в этом процессе, если температура - нулевая по Цельсию. Газ можно считать идеальным.

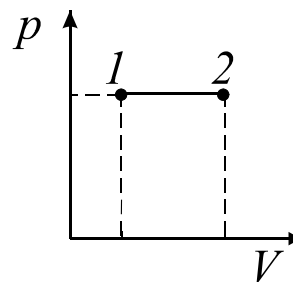


Рис. 51

2. В вершинах A и B квадрата $ABCD$ закреплены

два одинаковых положительных заряда Q , а в вершинах C и D - два одинаковых отрицательных заряда $(-q)$. Электрон, отпущенный из бесконечности, движется точно по оси, проходящей через центр квадрата, параллельно сторонам BC и AD . какова минимальная величина Q , при которой электрон может пролететь систему насквозь?

3. Имеется сосуд, содержащий два одинаковых отсека с клапаном на перегородке. Конструкция клапана такова, что он открывается, если разность давлений превышает определенную величину p , остается открытым в течение времени, достаточного для установления теплового равновесия во всем сосуде, а потом закрывается. Первоначально в обоих отсеках находится одинаковое количество идеального одноатомного газа при давлении p и температуре T . Газ в левом отсеке начинают нагревать до тех пор, пока не откроется клапан. Затем нагрев прекращают и возобновляют его, после того, как клапан закроется. Какова будет температура газа, когда клапан закроется в четвертый раз?

4. На гладком горизонтальном столе лежат шесть одинаковых бильярдных шаров, расположенных в вершинах правильного шестиугольника. Седьмому такому же шару сообщают начальную скорость v и пускают его вдоль одной из сторон шестиугольника так, чтобы он испытал соударения со всеми шестью шарами, после чего двигался бы по прямой, являющейся продолжением первоначальной траектории. Какой будет его конечная скорость? Все удары абсолютно упругие, шары свободно катятся без трения по поверхности стола.

5. Из точки A с высоты H (см. рис. 52) отпускают без начальной скорости частицу с массой M и зарядом Q . Движение происходит в однородном поле силы тяжести (ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз) и в однородном магнитном поле (вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка). В момент прохождения низшей точки траектории в точке B

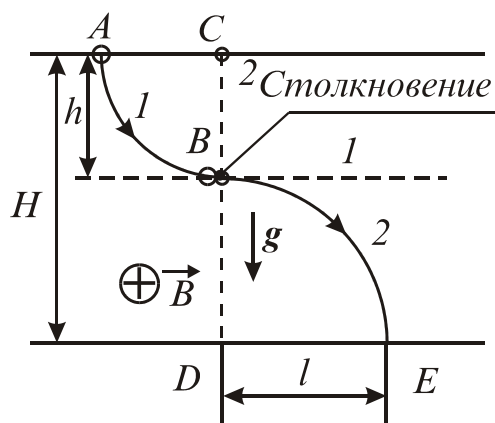


Рис. 52

эта частица сталкивается со второй, незаряженной частицей, отпущенной с той же высоты в подходящий момент времени также без начальной скоро-

сти из точки C . Отрезок $BC = h$. После соударения заряженная частица полетела по горизонтальной траектории в плоскости рисунка, а вторая приземлилась в точке E , отклонившись от вертикали на $DE = l$. Найдите массу m второй частицы. Считать, что удар абсолютно упругий и заряд при ударе не передается.

1993 год

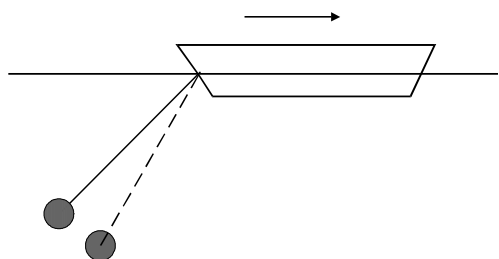


Рис. 53

1. Плывающая по реке с постоянной скоростью баржа тянет под водой на тросах два шарообразных контейнера одинакового размера, но разного веса (см. рис. 53). Угол отклонения первого троса по вертикали 45° , а второго 30° . Когда скорость баржи уменьшилась, угол отклонения

первого троса составил 30° . Каков стал угол отклонения от вертикали второго троса?

2. На гладкой поверхности покоится система, состоящая из трех одинаковых кубиков массы M и пружины жесткости k (рис. 54). Два кубика укреплены на пружине, а третий свободен. Первоначально пружина сжата на величину Δx . Пружину отпускают. Определите

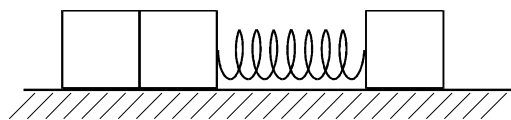


Рис. 54

скорость левого кубика в момент отрыва.

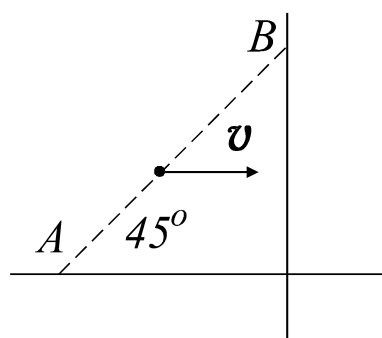


Рис. 55

3. Две бесконечные плоскости пересекаются под прямым углом. По каждой из них равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ (рис. 55). Посередине линии AB расположен точечный заряд того же знака q и массы m . Заряду сообщают скорость v параллельно одной из плоскостей. В какой точке заряд вновь пересечет линию AB ? Заряд не сталкивается с плоскостью.

4. Имеется проволочная рамка (рис 56), составленная из одинаковых ячеек



Рис. 56

в форме квадрата. Сопротивление рамки, измеренное между точками BD оказалось равным $25\ \text{Ом}$, а между точками AC - $3,66\ \text{Ом}$. Определите число звеньев в рамке. Точки B и D расположены точно посередине соответствующих сторон. Сопротивления каждого отдельного провода одинаковы.

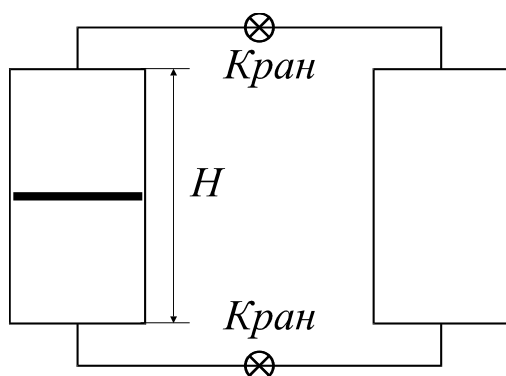


Рис. 57

5. Два одинаковых цилиндрических сосуда высоты H с вертикальными стенками соединены трубками (рис. 57). В левом сосуде имеется массивный поршень, способный без трения двигаться вдоль стенок. Над поршнем и под поршнем находится идеальный газ. Кран на верхней трубке закрыт, а на нижней открыт. Поршень пребывает в равновесии точно в середине цилиндра,

при этом давление под поршнем в два раза больше, чем над ним. Нижний кран закрывают, а верхний открывают. На какой высоте установится поршень? Система поддерживается при постоянной температуре.

1994 год

1. Предложена модель молекулы водорода: два протона находятся на некотором расстоянии друг от друга, а два электрона движутся симметрично по круговой орбите радиуса $64 \cdot 10^{-12}\ \text{м}$ в плоскости, перпендикулярной к соединяющей протоны оси. Найдите расстояние между протонами, при котором они пребывают в равновесии. Заряды электрона и протона равны по величине и противоположны по знаку.

2. К вертикальной стенке прикреплено пять одинаковых маятников в виде небольших массивных шаров на невесомых стержнях длины l . Точки подвеса расположены на одной вертикали, расстояние между ними $2l$ (см. рис. 58). Система находится в покое. Какую скорость надо сообщить самому нижнему маятнику, чтобы самый верхний мог совершить полный оборот вокруг своей оси? Все удары неупругие.

3. На доске длины L в ряд по росту поставлены 4 матрешки. При этом самая маленькая и самая большая стоят на краях; каждая меньшая матрешка находится от своей большей соседки на расстоянии, равном своему росту. Как далеко от края доски следует расположить опору, чтобы система пребывала в равновесии? Все матрешки геометрически подобны друг другу и изготовлены из одного и того же материала. Рост каждой следующей матрешки в A раз больше предыдущей.

4. Два колеса радиуса R и $R/2$ установлены в вертикальной плоскости так, что касаются друг друга и могут вращаться вокруг своих осей без проскальзывания. На ободе каждого колеса укреплено по одному маленькому массивному грузику одинаковой массы. Первоначально грузик на большом колесе находится в крайнем левом, а на малом - в нижнем положении. Если колеса отпустить, то на какой угол повернется большое колесо при достижении равновесия?

5. В поставленном вертикально цилиндрическом сосуде на высоте h удерживают массивный поршень так, что давление идеального газа в сосуде равно атмосферному давлению p . Внутри помещен еще один сосуд вдвое меньшего радиуса, заполненный тем же газом под вторым поршнем, который находится в равновесии на высоте $h/2$. При этом давление внутри малого сосуда составляет $(5/4)p$. Если поршень в большом сосуде отпустить, то как расположатся поршни в равновесии? Массы обоих поршней одинаковы. Оба сосуда изготовлены из материала, хорошо проводящего тепло, температура окружающей среды постоянна.

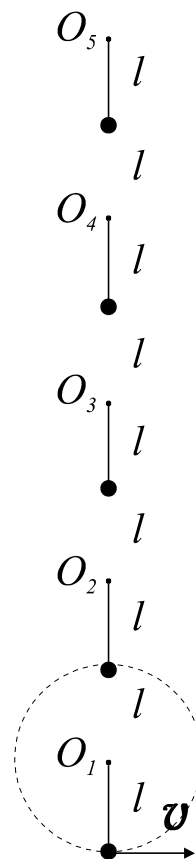


Рис. 58

1995 год

Задачи 1 тура¹

1. Из куска проволоки с сопротивлением 5 Ом изготовлено кольцо. Где надо присоединить к кольцу провода, чтобы сопротивление между точками их подсоединения оказалось равным 1 Ом?

2. Считая, что сопротивление воздуха отсутствует, оцените, с какой высоты должна упасть капля воды, чтобы "от нее не осталось мокрого места". Можно ли на самом деле пренебречь сопротивлением воздуха при решении этой задачи?

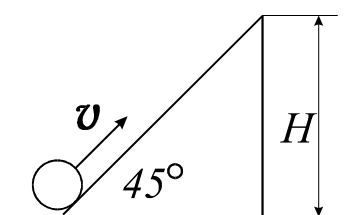
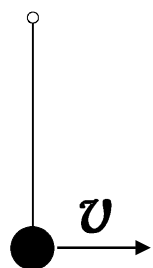


Рис. 59

3. Маленькому шарiku сообщают скорость v , направленную вдоль наклонной плоскости под углом 45° к горизонту (рис. 59). На какую максимальную высоту поднимется шарик? Высота наклонной плоскости H . Трение отсутствует.



4. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с укрепленным на конце грузом массы m (рис. 60). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Первоначально грузик находится в нижнем положении равновесия. Грузику сообщают горизонтально направленную скорость v . При каких значениях скорости v маятник будет колебаться, а при каких - вращаться? Чему равна сила упругости, возникающая в стержне, когда грузик находится в верхней точке? При каком значении начальной скорости v стержень в верхней точке будет сжат, а при каком - растянут?

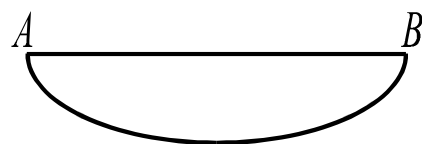


Рис. 61

5. Физик-экспериментатор исследовал упругие свойства элемента, состоящего из двух резинок различной длины, концы которых связаны (рис. 61). Зависимость силы упругости от расстояния AB приведена в таблице. Используя данные этой таблицы, найдите коэффициент жесткости каждой отдельной резинки. Постройте график зависимости силы упругости от расстояния.

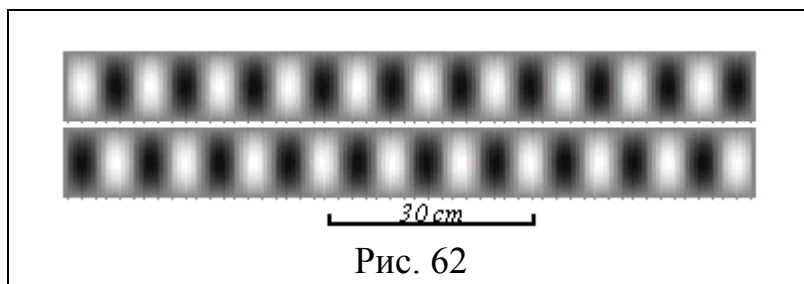
AB , см	2	4	6	8	10	12
-----------	---	---	---	---	----	----

¹ В 1995/96 учебном году городская олимпиада проводилась в два тура.

$F, \text{ Н}$	0	0,2	0,6	1,0	2,0	4,0
----------------	---	-----	-----	-----	-----	-----

Задачи 2 тура

1. На рис.62 показаны две последовательные фотографии звуковых волн в трубе, заполненной воздухом, полученные с помощью



«теневого» метода. Интервал времени между фотографиями равен 0,001 секунды. Определите скорость звука. Масштаб показан на рисунке.

2. Экспериментатор запустил секундомер в момент времени, когда в чайнике закипела вода. Вся вода выкипела через 1781 секунду. Экспериментатор заполнил чайник льдом той же массы при нулевой температуре, зажег газ и одновременно запустил секундомер. Экспериментатор записал в журнал, что во втором случае чайник выкипел через $2\theta 75$ секунд. Цифра θ изображена неразборчиво, это может быть 0, 3 или 6. Какая цифра стоит в журнале? Теплоемкость воды $c=4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), теплота плавления льда $\lambda=3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг, теплота парообразования $q=2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

3. Электромобиль снабжен электромотором, для которого э.д.с. индукции пропорциональна угловой скорости вращения ведущих колес с известным коэффициентом пропорциональности k . Найдите установившуюся скорость движения автомобиля. Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости автомобиля с известным коэффициентом пропорциональности α . Колеса автомобиля не проскальзывают, их радиус r . Электромотор включен в сеть с э.д.с. E , сопротивление цепи R .

4. Металлический баллон для газа имеет форму толстостенной металлической сферы. Масса баллона ровно в N раз превышает массу газа. Температура газа T , молярная масса μ . Плотность металла ρ , напряжение в металле (отношение силы к единице площади, Н/м²) должно составлять σ . Определите отношение внешнего и внутреннего радиусов баллона. Всегда ли задача имеет решение?

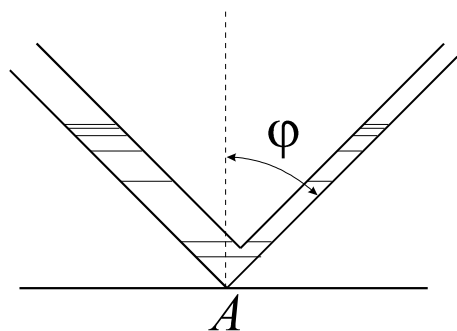


Рис. 63

5. Труба состоит из двух частей, соединенных под прямым углом (рис. 63). Диаметр одной из частей в два раза больше диаметра другой. В трубу налито некоторое количество воды. Найдите угол φ , при котором достигается максимальное давление в наинизшей точке A .

1996 год

1. Имеются два подобных друг другу гальванических элемента, изготовленных из идентичных материалов, все размеры которых отличаются в 2 раза. Как соотносятся электрические характеристики этих элементов: ЭДС, внутреннее сопротивление, эффективное время работы на постоянную нагрузку?

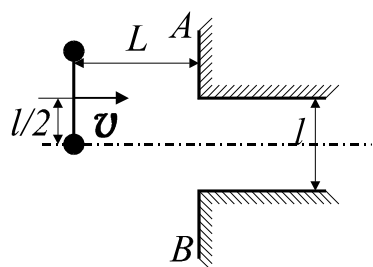


Рис. 64

2. Гантелька, состоящая из невесомого стержня длиной l и двух точечных масс, движется поступательно со скоростью v . На пути гантельки находится стенка с тоннелем шириной l (рис. 64). В начальный момент времени центр гантельки расположен на расстоянии L от плоскости AB . Через какое время центр гантельки вновь окажется на таком же расстоянии от плоскости AB ? Все удары абсолютно упругие и действие происходит в невесомости.

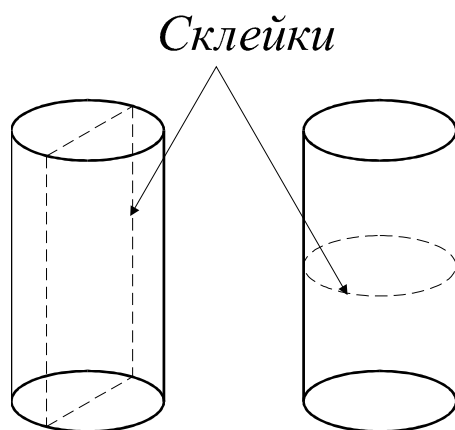


Рис. 65

3. Имеются два одинаковых баллона цилиндрической формы, которые склеены из двух составных частей каждый (рис. 65). Толщина стенок баллонов равна h . Внешние размеры баллонов составляют: высота - $8h$, диаметр - $4h$. Атмосферное давление равно p_0 . Первый баллон выдерживает давление $4p_0$. Какое давление выдерживает второй баллон ? Прочность стенок значительно превышает прочность склеивания.

4. В сосуде с газом находятся два поршня массы M каждый, скрепленные пружиной жесткости k (рис.66). В состоянии покоя пружина не деформирована, а объемы всех трех частей сосуда одинаковы. Определите частоту колебаний поршней. Процесс считать изотермическим. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует. Полная длина сосуда L , площадь поперечного сечения S .

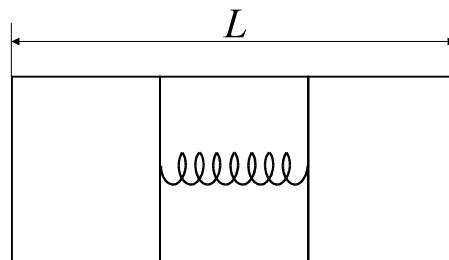


Рис. 66

5. Определить токи I_1 , I_2 и I_3 , текущие через амперметры A_1 , A_2 и A_3 соответственно (рис. 67). Напряжение $U = 10$ В, сопротивление $R = 100$ Ом. Сопротивлением амперметров пренебречь

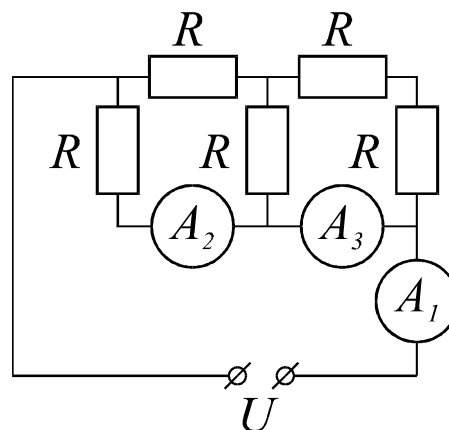


Рис. 67

1997 год

1. На одном берегу реки находится деревня A и ниже по течению деревня B , а на другом берегу - деревня C , так что все три деревни расположены в вершинах равнобедренного треугольника с углом φ при основании AB . Лодочник из деревни A хочет посетить деревни B и C и вернуться назад. По какому маршруту он должен отправиться, чтобы сэкономить время? Исследуйте вопрос в зависимости от соотношения между скоростью лодки в стоячей воде v и скоростью течения реки U .

2. Тонкому жесткому кольцу радиусом $R = 10$ см, лежащему на гладком горизонтальном столе сообщили скорость $V = 1$ м/с. Кольцо при движении налетает под углом α на шероховатую стенку. Коэффициент трения кольца о стенку равен $k = 0,3$. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцо после удара о стенку? Вычислить ее значение для углов падения 30° и 45° .

3. Моль воздуха находится в диэлектрическом цилиндре сечения S между двумя свободно скользящими металлическими поршнями, образующими плоский конденсатор, к которому приложено постоянное напряжение U . Как зависит установившееся расстояние между поршнями от температуры, если атмосферное давление постоянно и равно p_0 ? Оценить возможность экспериментального наблюдения этой зависимости и ее использования для измерения температуры. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м; атмосферное давление $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па; универсальная газовая постоянная $R = 8,314$ Дж/(Моль К), диэлектрическую проницаемость воздуха считать равной единице.
4. Межзвездная экспедиция обнаружила планету, похожую на Землю, имеющую ту же массу M и радиус R . Оказалось, однако, что половина массы сосредоточена в ядре радиуса $R/2$, центр которого смещен на $R/4$ относительно центра планеты. В каких пределах изменяется ускорение силы тяжести на поверхности планеты?
5. Внутри полый откачанной сферы радиуса R прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежутки времени между ударами при движении шарика в каждом направлении всегда одинаковы, но необязательно равны друг другу. Найти период движения шарика в зависимости от его энергии. Ускорение силы тяжести равно g .

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1975 год

1. Из соображений размерности для геометрически подобных пружин $k=CaE$, где C - безразмерная постоянная, a - какой-нибудь из геометрических размеров пружины, E - модуль Юнга, имеющий размерность Н/м². Поэтому некоторая третья пружина диаметра 9 мм из проволоки диаметра 0,6 мм и длиной 3 см имеет коэффициент жесткости в 3 раза больше первой, т.е. 3·14 Н/м. Очевидно, что коэффициент жесткости третьей пружины отличается в 3/7 раза от коэффициента жесткости второй. Окончательно $k=18$ Н/м.

2. Искажение формы связано с вращением планеты. Работа по перемещению элементарного тела по замкнутому контуру - от полюса вдоль полярного радиуса до центра планеты, затем вдоль экваториального радиуса до поверхности и вдоль поверхности вновь до полюса - равна нулю. При этом работа при движении вдоль поверхности жидкости равна нулю, а против центробежной силы - $m \cdot \omega^2 \cdot r^2/2$. Окончательно $\Delta r/r = \omega^2 \cdot r/2g = 1/18$.

3. Напряжение нужно представить в виде суммы трех гармонических составляющих. Затем учесть, что для гармонического сигнала на конденсаторе и индуктивности напряжение и ток сдвинуты на $\pi/2$, но в разные стороны. Окончательно

$$I = A \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cdot \sin \omega t + \frac{A\alpha}{2} \left[\frac{1}{(\omega + \Omega) \cdot L} - (\omega + \Omega) \cdot C \right] \sin(\omega + \Omega)t + \\ + \frac{A\alpha}{2} \left[\frac{1}{(\omega - \Omega) \cdot L} - (\omega - \Omega) \cdot C \right] \sin(\omega - \Omega)t.$$

4. Как правило очки, чуть более слабы, чем требуется. Если же линзу чуть сдвинуть, то сдвигается в ту же сторону и изображение предмета. У близорукого человека изображение получается до сетчатки, а у дальновзоркого - за сетчаткой. Поэтому и используется соответствующий сдвиг линз. Наклон очков - единственный способ приблизить линзу к глазу.

5. Считая все удары неупругими, получим $V=v_0 \sqrt{5}$.

1976 год

1. $Q \approx mgh \approx 3,5$ кДж.
2. Вольт - амперная характеристика состоит из прямолинейных участков:
 $U < 1B, I = 0;$
 $1B < U < 2B, I = U - 1;$
 $2B < U < 3B, I = 2U - 3;$
 $3B < U < 4B, I = 3U - 6;$
 $4B < U < 5B, I = 4U - 10;$
 $U > 5B, I = 5U - 15.$
3. Суммарная сила, действующая на рамку с током любой конфигурации, равна нулю. Поэтому сила, действующая на треугольную пластину, есть IBl . Через пластину течет ток $\mathcal{M}/R$. Вычисляя массу пластинки, находим искомое ускорение: $a = 2B\mathcal{M}\sqrt{3}/ldR_0$.
4. Сила натяжения максимальна в точке подвески цепочки и равна $5mg/8 = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Н.
5. Пусть скорость бора равна c . Перейдем в систему отсчета, движущуюся с бором. Тогда вода набегает со скоростью $v_1 = c + v$, а после бора движется с некоторой скоростью v . Из закона Бернулли $v_1^2/2 = gh + v_2^2/2$ и из уравнения непрерывности $v_1 H = v_2(h + H)$ получаем $v_1^2 = g(h + H)^2/(H + h/2)$. Окончательно $c = v_1 - v = 6,3$ м/с.

1977 год

1. Вторая пружина растянется сильнее.
2. После удара металлические оболочки изменяют свои скорости на противоположные, а резина сохранит начальную скорость. Это связано с тем, что за время удара, имеющего порядок R/c , деформируется лишь узкий слой резины толщины порядка Rc_2/c_1 ; здесь R - радиус шара, c_1 и c_2 - скорости звука в металле и в резине. После этого импульс каждого шара равен $P = Mv_0 - mv_0 = 3Mv_0/4$. Через достаточно большое время относительное движение оболочки и заполнения прекратится, и энергия перейдет в тепло. Тогда скорость каждого шара v определится из соотношения $P = (M + m)v = 5Mv/4$, откуда $v = 3v_0/5$.
3. Так как максимум температуры воздуха достигается в 15 часов, то легко найти $\varphi = -5\pi/4$. Пруд нагревается, когда температура воздуха больше

температуры воды, и остывает, когда температура воздуха меньше температуры воды. Поэтому при их равенстве и реализуется максимальная температура воды. Решая уравнение $25 = 20 + 10 \cos(2\pi t/24 + \varphi)$, легко находим, что $t = 19$ часов.

4. Гантелька рвется наверняка, если она первоначально ориентирована по полю и не рвется вообще, если ориентирована против поля. Скорость гантельки легко найти из энергетических соображений. Окончательно: а) $E > F_0/q + q/4\pi\epsilon_0 \cdot l^2$, б) $E < (F_0/q + q/4\pi\epsilon_0 \cdot l^2)/5$.

5. В плоскости клина на тело действуют скатывающая сила $mg \sin \alpha$, сила трения скольжения $f = mgk \cos \alpha$ и сила натяжения нити. Здесь α – угол наклона плоскости к горизонту. Чтобы тело остановилось и осталось на месте, пройдя угол φ , необходимо выполнение двух условий. Во-первых, скорость тела должна стать равной нулю. Приравняем работу силы трения и изменение потенциальной энергии: $fR\varphi = mgh \sin \alpha$, причем $h = R \cos(\varphi - \pi/2)$. Откуда $\sin \varphi / \varphi = k \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Во-вторых, проекция скатывающей силы на касательную к окружности, по которой движется тело, не должна превышать f : $mg \sin(\varphi - \pi/2) \leq mgk \cos \alpha$. Собирая эти два результата вместе, получим:

$\sin \varphi / \varphi = k \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ и $-\varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi \leq 1$. Так как $0 \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq \infty$, то первое условие при заданном φ выполнимо всегда. Проверка второго показывает, что оно не выполняется при $\varphi = \pi/2 + \pi \cdot 6$, а при $\varphi = \pi/2 + \pi/12$ выполняется. Итак, в случае а) остановка не возможна, а в случае б) возможна.

1978 год

1. Пружина растянута на величину $2mg/k$. После пережигания нити положение равновесия шара соответствует растяжению пружины на величину mg/k . Следовательно, амплитуда колебаний равна mg/k .

2. Теплообмен нити с окружающей средой будет определяться только ее температурой. Так как амплитуда импульсов напряжения одинакова, то до момента окончания второго импульса температура нарастает по тому же закону, что и для первого. Графически находим, что максимальная температура $T_{\max} = 1650$ К. Уменьшение температуры также происходит по тому же закону, но начиная с температуры $T_{\max}$.

3. Теплообмен чайника со средой определяется температурой поверхности чайника. В обоих случаях чайник прогрет до 100°C , поэтому мощность те-

пловых потерь одинакова и равна P . Тогда с очевидностью $4P = P + \lambda M/2t$. Отсюда $t = \lambda M/6P$.

4. Тепло $Q = IU\tau$ выделяется в разрядной трубке практически мгновенно. Поэтому газ в трубке нагревается изохорически и $T_1/T_0 = p_1/p_0$, где p_1 - давление газа, T_1 - температура газа после завершения изохорического процесса. Неизвестное давление p_1 найдем из условия, что в изохорическом процессе газ не совершает механической работы: $Q = 3mR (T_1 - T_0)/2\mu = 3(p_1 - p_0)V/2$. Затем газ, адиабатически расширяясь, начинает поступать в балластный объем до тех пор, пока его давление не станет равным p_0 . (Давление в балластном объеме практически не меняется). Тогда $T_1^5/p_1^2 = T_2^5/p_0^2$. Итак, $T_1 = T_0(1 + 2IU\tau/3p_0V)$, $T_2 = T_0(1 + 2IU\tau/3p_0V)^{3/5}$.

5. В системе отсчета, движущейся со скоростью ветра, бомба падает во всех трех случаях совершенно одинаково. Поэтому $a_1 = l + vt$, $a_2 = l - vt$, где l - расстояние, проходимое бомбой за время падения в данной системе отсчета, t - время падения. Чтобы лететь перпендикулярно ветру, самолет должен вносить поправку на снос, отвечающую некоторому углу α . Переходя в неподвижную систему отсчета, в третьем случае получаем: $x = l \cdot \cos\alpha$, $y = vt - l \sin\alpha$. Собирая все вместе, находим:

$$x = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/V^2}, \quad y = \frac{a_1 - a_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{v}{V}.$$

1979 год

1. 2250 кг/м^3 .

2. Работа машины за сутки равна $A = PT$, где P - мощность, а $t = 24$ ч. С другой стороны, $A = Q\eta$, где $Q = cmT$ - тепло, запасенное в резервуаре, c - теплоемкость воды, m - ее масса, $\eta = \Delta T/T$ — к.п.д. машины. Отсюда находим $m \approx TPt/c(\Delta T)^2$. Полагая $T \approx 300 \text{ К}$, $\Delta T \approx 10 \text{ К}$, получим $m \approx 500 \text{ т}$. Эта оценка занижена, так как реальный КПД меньше.

3. Поскольку угол α мал, времена t_1 и t_2 отличаются на удвоенное время падения шарика с высоты $h \approx l\alpha$ и $t_1 - t_2 = 2\sqrt{2l\alpha/g}$, следовательно, $\alpha = g(t_1 - t_2)^2/8l$.

4. Дополним полусферу до сферы. Тогда потенциал в точке A равен $2q/3R = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 - искомый потенциал, создаваемый левой полусферой, а φ_2 - потенциал, создаваемый правой полусферой, q - заряд сферы. Из таблицы

находим, что $\varphi_2 = \varphi(3R/2) = 46,5$ В. Заметим также, что $\varphi(0) = q/2R$ - потенциал в центре полусферы, равный, согласно таблице, 100 В. Таким образом, $\varphi_1 = 4\varphi(0)/3 - \varphi(3R/2) = 86,8$ В.

5. Так как масса левого шара намного меньше, чем правого, то его скорость при каждом соударении с большим уменьшается по величине примерно на $2V_0$. После n ударов легкий шар будет иметь скорость примерно $v_0 - 2nV_0$. Дальнейшие соударения станут невозможны, если $-V_0 \leq v_0 - 2nV_0 \leq V_0$. Отсюда $v_0 \approx 2nV_0$. Записывая закон сохранения энергии и пренебрегая малыми членами, получим: $\Delta V \approx mv_0^2/2MV_0 \approx 2n^2mV_0/M \approx V_0/10$.

1980 год

1. Заряды распределятся равномерно по обращенным друг к другу граням кубиков. Поскольку $h \ll a$, то электрическое поле в зазоре между кубиками равно $E = \sigma/\epsilon_0 = q/a^2\epsilon_0$. На каждый кубик будет действовать сила $f = qE$. Ускорение кубиков постоянно и равно f/m . До столкновения каждый кубик должен пройти с этим ускорением путь $h/2$. Собирая все результаты вместе, получим: $t = \sqrt{\rho \epsilon_0 a^5 h / q^2}$.

2. Поскольку период собственных колебаний шарика, равный 0,5 с, значительно больше времени действия внешней силы, то смещением шарика за время действия этой силы можно пренебречь. После удара шарик приобретает скорость $v = F \Delta t/m$ и будет колебаться с амплитудой A , которую определим из условия $kA^2/2 = mv^2/2$. Окончательно $A = F \Delta t/m\omega \approx 5$ см, где $\omega = \sqrt{k/m}$.

3. Ответ: $4mg/k$.

4. Прежде всего отметим, что для идеального одноатомного газа изменение внутренней энергии дается формулой $\Delta U = 3/2 \cdot (\Delta p V)$. В нашем случае конечное и начальное состояние газа характеризуется одинаковым объемом V , поэтому $\Delta U = 3/2 \cdot V \Delta p$. (Непринципиально, что газ разделен на две части, которые могут иметь разные температуры - температура не входит в приведенные соотношения). Вычислим теперь изменение внутренней энергии газа. Начнем двигать первый поршень и перейдем в систему отсчета, связанную с ним. Тогда газ и второй поршень движутся со скоростью v и имеют кинетическую энергию $(m + M)v^2/2$. Через достаточно большое время они остановятся, и эта энергия перейдет в тепло. Вернемся в исходную

систему отсчета, в которой теперь газ и оба поршня вращаются со скоростью v . Остановим, как этого требует условие, один из поршней. Мы приходим к только что рассмотренной ситуации, а значит в тепло перейдет еще такое же количество энергии $(m + M)v^2/2$. Таким образом, полное приращение внутренней энергии газа равно $\Delta U = (m + M)v^2/2$. Теперь легко находим, что $\Delta p = (m + M)v^2/3V$.

5. Как следует из закона всемирного тяготения, у планет с одинаковой средней плотностью ускорение свободного падения на поверхности пропорционально радиусу планеты: $g_3/R_3 = g_a/R_a$. (Здесь и далее индекс "3" относится к Земле, а индекс "a" – к астероиду). Давление в толще пород у подножья горы на Земле и на астероиде должно быть одинаково по порядку величины: $\rho g_3 h_3 = \rho g_a h_a$. Астероид можно считать шарообразным, если отношение высоты гор к радиусу астероида мало, т.е. $h_a/R_a \ll 1$. Используя предыдущие соотношения, легко получаем: $h_a/R_a \approx h_3 R_3 / R_a^2 \ll 1$. Подставляя $h_3 \approx 10$ км и $R_3 \approx 6400$ км, находим $R_a \geq 50$ км. Заметим, что относительная высота гор убывает с ростом радиуса планеты обратно пропорционально квадрату ее радиуса. Проведенная оценка согласуется с результатами фотографирования спутников Юпитера и Сатурна с космических аппаратов.

1981 год

1. Работа не зависит от способа перемещения зарядов и равна $2qEl$.
2. Если остановился первый кубик, то должен остановиться и второй. При этом суммарная скатывающая сила не должна превышать максимальной силы трения: $(m + M)g \cdot \sin \alpha < M g k \cdot \cos \alpha$. Первый кубик будет опускаться неограниченно далеко при выполнении противоположного условия: $m > M(k \cdot \cot \alpha - 1)$.
3. Поскольку сосуд металлический и процесс совершается достаточно долго, то можно использовать закон Бойля–Мариотта. После того, как в сосуд опустили первый поршень, давление под ним станет равным $2p_0$. После опускания всех поршней давление газа между первым и вторым поршнями равно $10p_0$. Для этой массы газа имеем $10p_0 H = p_0 h/2$, откуда $H = h/20$.
4. Следует записать законы сохранения энергии и импульса для случаев, когда начальная скорость малого кольца равна v_0 и $2v_0$. При этом следует учесть, что в обоих случаях энергия электростатического взаимодействия в

момент пролета малого кольца через большое одинакова и что для критической начальной скорости v_0 конечные скорости колец одинаковы. Решая полученную систему уравнений, находим искомые скорости: $U = (2 + \sqrt{3})v_0 / 2$, $V = (2 - \sqrt{3})v_0 / 2$.

5. Колебания шарика между пластинками объясняются тем, что при ударе о пластину он периодически меняет знак заряда, причем величина заряда пропорциональна напряжению: $q = \alpha U$. Сила, действующая на шарик со стороны электрического поля, вычисляется следующим образом: $f = qE = \alpha U^2/h$. Ускорение шарика при движении вниз $g_+ = g + a$, а при движении вверх $g_- = g - a$, где $a = f/m$. На пороге колебаний имеем $mg_+h/2 = mg_-h$, где учтено двукратное уменьшение энергии при ударе шарика о верхнюю пластину. Следовательно, $a = gU^2/3U_0^2$. При $U = \sqrt{3}U_0$ имеем $a = g$, $g_+ = 2g$, $g_- = 0$. Время падения шарика вниз $t_1 = \sqrt{2hg_+} = \sqrt{h/g}$. Скорость перед ударом о нижнюю пластину равна $\sqrt{2hg_+} = 2\sqrt{gh}$, а после отскока $\sqrt{2hg_-}$. Время полета с этой постоянной скоростью до верхней пластины $t_2 = h / \sqrt{2gh}$, а период колебаний $t_1 + t_2 = \sqrt{h/g}(1 + 1/\sqrt{2})$.

1982 год

1. $\alpha = 2kl_0/3\rho gV \approx 8^\circ$.
2. За один импульс стержень получает энергию qEl , а за девять импульсов $9qEl$. Это позволяет найти из закона сохранения энергии скорость вращения к моменту прекращения девятого импульса: $mv^2 = 9qEl$. В паузе между девятым и десятым импульсами стержень вращается с этой скоростью, поворачиваясь на угол $\pi/2$. Окончательно $\tau = \pi \sqrt{ldm/qU_0}/4$.
3. В точке A шарик будет иметь скорость $v_0 = \sqrt{2hg}$. После удара о вторую плоскость шарик полетит по той же траектории, если он упадет на нее нормально. Это означает, что в точке удара о вторую плоскость горизонтальная и вертикальная составляющие скорости равны $v_0 = \sqrt{2hg}$. Двигаясь обратно с соответствующими начальными компонентами скорости, шарик должен пролететь по горизонтали расстояние $l + H$, а по вертикали $l - H$. Проводя простейшие вычисления, находим, что $h = 2l/3 = 6$ см.

4. Поршни a и b схлопнутся, поскольку газа C максимальное количество. Положение поршня c будет определяться только газами A и B . Следовательно, отношение объемов будет $1 : 2$ и, соответственно, угол между поршнями равен 120° .

5. При смещении шарика на некоторое расстояние x на конце трубы образуется нескомпенсированный заряд на отрезке трубы длиной $2x$. Этот заряд можно считать точечным, так что сила притяжения дается соотношением $f = 2x\pi d\sigma q/4\pi\epsilon_0(l/2)^2$. Таким образом, сила представляется в виде $f = kx$, где $k = 2d\sigma q/\epsilon_0 l^2$. Тогда $T = 2\pi \sqrt{m/k}$.

1983 год

1. Если нарисовать на pV -диаграмме несколько изотерм, то становится ясно, что максимум температуры достигается в верхней точке касания изотермы с окружностью. Из соображения симметрии можно заключить, что координаты этой точки равны $p = (3 + 1/\sqrt{2})p_0/2$, $V = (3 + 1/\sqrt{2})V_0/2$. Теперь легко находим искомую температуру: $T = (3 + 1/\sqrt{2})^2 p_0 V_0 / 4R$.

2. Мяч вращается из-за того, что скорость течения линейно меняется по глубине реки. У поверхности реки она максимальна, а у дна близка к нулю. В системе отсчета, связанной с центром мяча, скорость воды в нижней точке мяча равна $u = vr/h$, где r - радиус мяча, h - глубина реки, v - скорость течения. Мяч совершит полный оборот за время $t = 2\pi r/u$ и пройдет при этом по течению расстояние $l = vt$. Используя полученные соотношения, находим, что $h = l/2\pi$. Для приведенных в условии численных значений $h \approx 8$ м.

3. Длительность звучания одной стороны пластинки равна примерно 30 минут. Делая за 1 минуту 33 и 1/3 оборота, пластинка за все время звучания совершает примерно 1000 оборотов. Поскольку ширина участка с записью примерно равна 10 см, то получаем следующую оценку ширины бороздки: $d \approx 0,1$ мм.

4. Рассмотрим два электрона, первый из которых влетает в зазор в момент времени, когда напряжение максимально ($\sin\omega t = 1$), а второй - когда оно минимально ($\sin\omega t = -1$). Первый электрон получит скорость

$v_1 = v_0 \sqrt{1 - 2eU_0/mv_0^2} \approx v_0 \left(1 - eU_0/mv_0^2\right)$, где мы использовали условие $eU_0/mv_0^2 \ll 1$. Второй электрон будет иметь скорость $v_2 \approx v_0 \left(1 + eU_0/mv_0^2\right)$. Расстояние между этими электронами равно $l = v_0 T/2 = v_0 \pi/\omega$. Второй электрон вылетел позже и имеет скорость большую, чем первый. Через время $t \approx l/(v_2 - v_1)$ он догонит его. Это произойдет на расстоянии $L \approx v_0 t$. Все электроны, заключенные между этими двумя, соберутся в компактный сгусток. Собирая приведенные соотношения вместе, получим: $L \approx \pi m v_0^3 / 2e\omega U_0$.

5. Автомобиль должен вернуться в точку "старт" точно в момент зажигания зеленого света – только тогда он будет двигаться по кольцу сколь угодно долго. Предположим, что за время одного обхода прошло m циклов переключения, т.е. $T = 40m$ секунд. Поскольку длина кольца 3600 м, то скорость машины $v = 90/m$ м/с. Теперь находим время прибытия к светофорам 2, 3 и 4: $t_2 = 900/v = 10m$, $t_3 = 2400/v = 80m/3$, $t_4 = 3000/v = 100m/3$. Поскольку зеленый свет горит 40 секунд и столько же красный, то условие того, что машина проходит светофор без остановки, можно записать в виде $\{t_i/40\} < 1/2$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Проверяя эти условия последовательно для $m = 0, 1, 2, \dots$, находим минимально возможное $m = 5$, при котором оно выполнено. Итак, $v_{\max} = 90/5 = 18$ м/с.

1984 год

1. Количество теплоты равно кинетической энергии движущегося состава. Считая, что в составе 50 вагонов, масса каждого вагона 50 т и скорость движения порядка 70 км/ч, получим: $Q \approx 8 \cdot 10^8$ Дж. Этого количества тепла достаточно, чтобы нагреть до кипения 2 т воды.

2. В условиях равенства подъемной силы шаров одинакового объема V получаем $pV = mRT_H/\mu_H$ и $pV = mRT_B/\mu_B$, где массы газа m и давления внутри оболочек p считаем одинаковыми. Отсюда находим $T_B = T_H \mu_B/\mu_H$. Принимая $T_H = 300$ К, получим $T_B \approx 4200$ К. Такую температуру не выдержит самый тугоплавкий металл.

3. В непосредственной близости от диска поле E вычисляется по формуле для заряженной плоскости $E = \sigma/2\epsilon_0 = 2$ В/м. При вычислении поля вдали от диска можно считать диск точечным зарядом: $E = \sigma r^2/4\epsilon_0 x^2$, или $E = 1/x^2$

(В/м), где x – расстояние от диска в метрах. Истинная зависимость совпадает с этими законами вблизи и вдали от диска, а на промежуточных расстояниях плавно переходит из одной в другую. При этом истинная величина поля несколько меньше, чем даваемая приведенными асимптотическими выражениями. Теперь нетрудно нарисовать и соответствующий график.

4. Рассмотрев упругое соударение шаров массы M и $M/3$, можно получить, что скорость второго шара после удара составляет $3v_0/2$. Очевидно, что искомая скорость 17-го шара равна $(3/2)^{16} v_0 \approx 657v_0$.

5. Так как собственная частота колебательного контура $f = 1/LC$, то отношение частот колебаний контуров $n = f_1/f_2 = \sqrt{C_1/C_2} = \sqrt{d_1/d_2}$, где $d_1 = d + x$ и $d_2 = d - x$ – новые расстояния от подвижной пластины до неподвижных, x – смещение подвижной пластины. Очевидно, что $\Delta x = Ma/k$. Собирая все результаты вместе, нетрудно получить, что $a = kd(n^2 - 1)/(n^2 + 1)M$.

1985 год

1. При движении из верхней точки траектории шарик за время t проходит одну клетку фотографии. Отсюда можно найти, что $v_x t = a$, $gt^2/2 = a$, где $a = 2,5$ см – размер одной клетки, v_x – горизонтальная компонента скорости шарика, остающаяся неизменной за все время полета. Отсюда находим $v_x^2 = ga/2$. При падении с высоты $4a$ шарик приобретает вертикальную компоненту скорости $v^2 = 8ga$. Суммарная скорость в точке падения $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17gh/2} \approx 1,44$ м/с. В силу обратимости движения шарика, она совпадает с его начальной скоростью.

2. Ясно, что минимальная температура достигается в точке p_0, V_0 . В соответствии с уравнениями состояния газа $p_0 \cdot V_0 = \nu RT_{min}$ и $pV = \nu R2T$ получим: $2p_0 V_0 = pV$. Подобных точек на графике две. Одна из них — это точка $p_0, 2V_0$. Вторая лежит на прямой линии $p = p_0 V/V_0$, и для нее легко находим $V = \sqrt{2} V_0$.

3. Перед ударом о неподвижную ракетку скорость шарика равна $v = \sqrt{2gH}$. После удара о ракетку шарик с очевидностью получает скорость $0,8v$. Пусть теперь ракетка движется со скоростью V . В системе отсчета, связанной с ракеткой, шарик налетает со скоростью $v + V$. После удара его скорость в этой системе отсчета станет равна $0,8(v + V)$, а в исходной — $0,8(v$

+ V) + V . Поскольку после удара шарик поднимается на ту же высоту, то должно выполняться условие $0,8(v + V) + V = v$. Отсюда находим $V = v/9 = \sqrt{2gH}/9 \approx 0,47$ м/с.

4. Используя принцип суперпозиции, заключаем, что сфера с отверстием эквивалентна сфере без отверстия и отрицательному заряду величины $q_0 = Qr^2/4R^2$, расположенному на месте отверстия. Суммарная сила, действующую на заряд q со стороны равномерно заряженной сферы, равна нулю. Поскольку размер отверстия мал, то силу, действующую со стороны заряда q_0 , можно найти по закону Кулона: $f = qQr^2/16\pi\epsilon_0R^2$. Она направлена по прямой, соединяющей центр сферы с отверстием.

5. После удара о ступеньку шарик теряет свою вертикальную компоненту скорости, а горизонтальная остается неизменной. Отсюда, в частности, следует, что движение шарика между ударами периодически повторяется. В первом опыте шарик тратит на весь цикл 0,4 с, причем из них 0,3 с - на падение. Тогда ясно, что в первом опыте длина горизонтального полета $L = 3h/4$, где h – высота ступеньки. Используем далее известное соотношение для дальности полета L тела, брошенного горизонтально с высоты H со скоростью v : $L = v\sqrt{2h/g}$. В первом опыте, очевидно, получаем $3h/4 = v\sqrt{2h/g}$. Во втором опыте при падении с различных высот находим:

а) $H = h$, $L_1 = 2v\sqrt{2h/g}$. Отсюда $L_1 > h$, шарик не ударится о первую ступеньку;

б) $H = 2h$, $L_2 = 2v\sqrt{4h/g} = 3\sqrt{2}h/2 \approx 2,1h$. Отсюда $L_2 > 2h$, шарик не ударится о вторую ступеньку;

в) $H = 3h$, $L_3 = 2v\sqrt{6h/g} = 3\sqrt{3}h/2 \approx 2,5h$. Отсюда $L_3 < 3h$, шарик ударится о третью ступеньку.

В силу периодичности движения шарик ударится затем о шестую, девятую и т.д. — каждую третью ступеньку. Поэтому он ударится о тридцать девятую и сорок вторую, а сороковую — нет.

1986 год

1. Нужно учесть два обстоятельства. Во-первых, потери тепла через дверь определяются разностью температур по обе стороны двери. Во-вторых, поскольку тепло уходит только через двери, то поток тепла через двери

одинаков, причем в обеих описанных в условии ситуациях. Отсюда получаем: $T - T_0 = T_1 - T_0 = T_2 - T_1$, где T_1 и T_2 - искомые температуры в комнате и в прихожей. Из этого соотношения находим $T_1 = T = 8^\circ$, $T_2 = 26^\circ$.

2. Уединенный лист создает электрическое поле $E = \sigma / 2\epsilon_0$. Поля, действующие на каждый лист, можно найти по принципу суперпозиции: $E_1 = 5\sigma / 2\epsilon_0$, $E_2 = \sigma / \epsilon_0$, $E = 3\sigma / 2\epsilon_0$. Теперь вычисляем ускорение каждого листа: $a_n = \sigma_n E_n / \rho$. Окончательно $a_1 = 5\sigma^2 / 2\epsilon_0 \rho$, $a_2 = \sigma^2 / 2\epsilon_0 \rho$, $a_3 = 9\sigma^2 / 2\epsilon_0 \rho$.

3. Легко понять, что шар налетает по линии AO . В силу симметрии траекторий разлета проекции импульса на направление, перпендикулярное к OA , должны быть одинаковы, что возможно лишь если одинаковы скорости шаров. Величину этой скорости находим из сохранения компоненты импульса вдоль оси OA : $v = v_0 / 2 \cos \alpha$. Выделившееся тепло Q находим из баланса энергии $mv_0^2 / 2 = 2mv^2 / 2 + Q$. Для $\alpha = 30^\circ$ получаем $Q = mv_0^2 / 6$.

4. Рассмотрим элемент кольца длины $R\alpha$ и массы $m\alpha / 2\pi$, где α - малый угол. На него действует сила $2T \sin(\alpha/2) \approx T\alpha$ в направлении центра кольца, которая сообщает этому элементу ускорение $\omega^2 R$. Отсюда находим, что $T = m \omega^2 R / 2\pi$. С другой стороны, по закону Гука $T = k \cdot (2\pi R - l)$. Окончательно $R = l / 2\pi (1 - m\omega^2 / 4\pi^2 k)$.

5. В плоскости, в которой лежит карандаш, действует скатывающая сила $mg \cdot \sin \alpha$ и сила трения. При начале качения карандаша в направлении качения действует лишь часть силы тяжести, равная $f_x = mg \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$. Карандаш устойчив, когда векторная сумма этой компоненты с перпендикулярной к плоскости частью силы тяжести $f_y = mg \cdot \cos \alpha$ проходит через ребро карандаша. Это приводит к условию $\tan \gamma = f_x / f_y = \tan \alpha \sin \beta$, где для шестиугольника $\gamma = 30^\circ$. Известно, что $\beta = 60^\circ$, тогда $\alpha = \arctg(2/3)$.

1987 год

1. Лиана выдерживает некоторое предельное натяжение $T_{\text{пр}}$, причем $2mg < T_{\text{пр}} < 3mg$. Сила натяжения лианы максимальна, когда обезьяна находится в нижней точке траектории: $T = mg + mv^2 / l$, где l - длина лианы, а скорость v можно найти из закона сохранения энергии $mv^2 / 2 = mgl(1 - \cos 45^\circ)$. Поскольку $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, то нетрудно получить, что $T = (3 - \sqrt{2})mg \approx 1,596mg$. Таким образом, лиана выдержит раскачивающуюся обезьяну.

2. Из условия минимальности соответствующих величин вытекает, что процесс можно считать в случае а) – изохорическим, в случае б) – изотермическим и в случае в) изобарическим. Как видно из рисунка, правило обхода цикла таково, что в случаях а) и б) газ отдает тепло, а в случае в) – получает.

3. Если скорость грузика меньше порогового значения $v_0 = \sqrt{k/ml}$, то период колебаний не зависит от начальной скорости и равен $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$.

Если же $v_0 > \sqrt{k/m} \cdot l$, то грузик будет периодически ударять о стенку. До удара он движется по закону $x = (v_0/\omega) \cdot \sin \omega t$. Отсюда находим время, которое затрачивает грузик на движение из положения равновесия до стенки $t = (1/\omega) \arcsin(\omega \cdot l/v_0)$. Поскольку удар о стенку упругий, то точно за такое время грузик возвращается в положение равновесия. Учтем еще половину периода, за которую грузик движется слева от положения равновесия. Окончательно $T = T_0 [1/2 + (1/\pi) \cdot \arcsin(2\pi l/v_0 T_0)]$. Отметим, что при $v_0 \rightarrow \infty$ $T \rightarrow T_0/2$. Теперь нетрудно и нарисовать соответствующий график.

4. На плоскости на шайбу действует скатывающая сила $mg \cdot \sin \alpha$, сила натяжения пружины T_0 и сила трения покоя f , где α – угол наклона плоскости к горизонту. Векторная сумма этих сил должна равняться нулю. Отсюда получаем соотношение $T_0^2 + (mg \cdot \sin \alpha)^2 = f^2$. Скольжение начнется, когда сила трения f достигнет величины $mgk \cdot \cos \alpha$. Из этих двух условий легко находим предельное значение угла α : $\sin \alpha = \sqrt{[k^2 - (T_0/mg)^2] / (1 + k^2)}$.

5. Разобьем дугу в три четверти окружности на три малых дуги, каждая по одной четверти. Нетрудно вычислить поле в точке C , создаваемое каждой из этих трех дуг. Действительно, для каждой из них мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 43а, но развернутую на 90° . (При этом надо учесть, что заряд каждой дуги в три раза меньше, чем для случая, изображенного на рис. 43б). Суммарное поле находим, используя принцип суперпозиции.

Окончательно $E_x^C = (-2E_y^B + E_y^A) / 3 = 6,26 \text{ В/м}$; $E_y^C = E_x^A / 3 = 1,47 \text{ В/м}$.

1988 год

1. Первая пуля сообщает шайбе скорость mv/M , которая через две секунды погасится третьей пулей. Аналогичная ситуация будет со второй и с чет-

вертой пулями. В конечном итоге шайба сместится на $2\sqrt{2}mv\tau/M = 0,566$ м к юго-востоку. Заметим, что поскольку $m \ll M$, то мы пренебрегли изменением массы шайбы при попадании в нее пуль.

2. Рассмотрим два элемента ΔV_1 и ΔV_2 первой планеты, расположенные друг от друга на расстоянии r . Они притягиваются с силой $f_1 = \gamma \cdot \Delta V_1 \Delta V_2 / r^2$. Для второй планеты сила взаимодействия складывается из силы гравитационного притяжения и электростатического отталкивания: $f_2 = \gamma \cdot \Delta V_1 \Delta V_2 / r^2 - \rho_{\text{эл}} \cdot \Delta V_1 \Delta V_2 / 4\pi \cdot \epsilon_0 r^2$, где $\rho_{\text{эл}} = Q/V = Q\rho/M$ – объемная плотность электрического заряда. Нетрудно заметить, что для обеих планет закон взаимодействия любых двух элементов одинаков и отличается лишь численным коэффициентом. Поэтому для отношения давлений в центре планет получаем следующее выражение: $P_2/P_1 = f_2/f_1 = 1 - Q^2/4\pi\epsilon_0 \gamma M^2 \approx 1 - 0,37 \cdot 10^{-21}$.

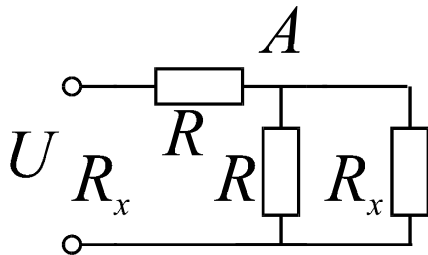


Рис. 68

3. Бесконечная цепочка эквивалентна следующей схеме (рис. 68): Тогда находим сопротивление цепочки $R_x = (1 + \sqrt{5})R/2$. Легко так же вычислить напряжение в точке А: $U_A = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)] U$. Отбросим теперь первое звено. Тогда мы вновь придем к исходной бесконечной цепочке, на вход которой подано уже напряжение U_A . При этом отмеченное штриховкой сопротивление приблизится к концу цепочки.

Теперь можно найти напряжение еще на одно звено ближе к штрихованному сопротивлению: $U_B = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)] U_A$ и т.д. Прделав эту процедуру пять раз, получим значение напряжения на заштрихованном сопротивлении $U_x = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)]^5 U$, а искомый ток $I = U/R = 0,0813$ А.

4. Из уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$, примененного для каждой части газа, следует, что слева от перегородки к окончанию процесса будет температура $4T_0$, а справа – $6T_0$. После того, как перегородку уберут, а сосуд теплоизолируют, суммарная внутренняя энергия газа W не меняется. Для ν молей одноатомного газа $W = 3\nu RT/2$, но тогда $3R \cdot 4T_0/2 + 3R \cdot 6T_0/2 = 3 \cdot 2RT/2$, откуда следует, что $T_x = 5T_0$. Как видно из рисунков, конечный суммарный объем газа $4V_0$. Тогда для суммарного количества газа в 2 моля из уравнения состояния $pV = \nu RT$ получаем, что $p = 5p_0/2$.

5. Условие равновесия рычага имеет $f_2/f_1 = 3/2$, где f_2 и f_1 — силы трения, действующие на грузы. Предположим, что сдвинулся второй груз. Тогда $f_2 = m_2 g k$ и $f_1 = 2f_2/3 = 2m_2 g k/3 > m_1 g k$. Получили противоречие — сила трения, действующая на первый груз, больше максимальной силы трения покоя. Следовательно, сдвинется первый груз.

1989 год

1. В момент, когда наблюдается половина диска, Марс, Земля и Солнце находятся в вершинах прямоугольного треугольника. Поэтому искомое расстояние $S = \sqrt{225^2 + 147^2} = 196$ млн км.

2. Сначала по закону сохранения импульса находим скорость снаряда u до взрыва: $Mv_1 + Mv_2 = 2Mu$, откуда $u = v \sqrt{2/4}$. Теперь высоту взрыва можно найти по закону сохранения энергии $v^2 = 2gh + u^2$, откуда $h = 7v^2/16g$.

3. Движение состоит из двух этапов. На первом проскальзывают друг относительно друга все кирпичи, а на втором — только верхний и средний, а средний и нижний движутся как единое целое. На первом этапе, как видно из рисунка 69а, ускорения кирпичей составляют соответственно, gk , $-3gk$, $2gk$.

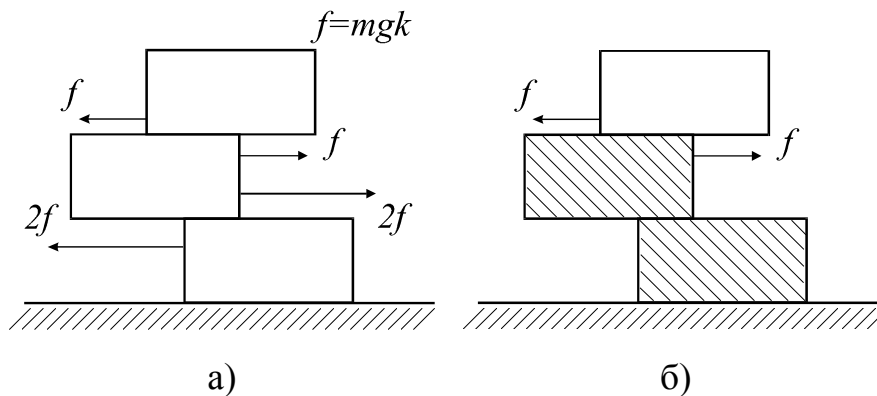


Рис. 69

Поэтому относительное ускорение среднего и нижнего равно $5gk$, первый этап длится время $t = v/5gk$ и за это время нижний и средний кирпичи смещаются друг относительно друга на расстояние $S_1 = v^2/10gk = 2,55$ см. Относительное ускорение верхнего и среднего кирпичей составляет $4gk$. За время t они пройдут друг относительно друга расстояние $S_2 = vt - 4gkt^2/2 =$

$3v^2/25gk$, а величина относительной скорости составит $v - 4gkt = v/5$. На втором этапе (рис. 69б) верхний кирпич по-прежнему имеет ускорение gk , а средний и нижний вместе $-gk/2$, так что относительное ускорение $3gk/2$. Поэтому на втором этапе верхний кирпич пройдет до остановки относительно среднего расстояние $S_3 = (v/5)^2/3gk$. Суммарное относительное смещение верхнего кирпича $S = S_2 + S_3 = 2v^2/15gk = 3,40$ см.

4. В законе распределения поля вдоль оси x можно выделить три характерных участка. На первом из них вклад в поле вносит только один точечный заряд, находящийся в начале координат. Отсюда легко находим величину этого заряда: $q = 4\pi\epsilon_0 E_1 x_1^2 = 0,112 \cdot 10^{-13}$ Кл, где индекс 1 относится к номеру столбца таблицы. На промежуточном участке поле можно вычислить в приближении бесконечной заряженной плоскости $E_0 = \sigma/2\epsilon_0$, где $\sigma = q/a^2$. Этот промежуточный участок хорошо просматривается в виде характерной "полочки" на графике зависимости величины напряженности поля E от координаты x , где поле E почти постоянно. Отсюда получаем выражение для шага решетки $a = \sqrt{2\pi E_1/E_0} \cdot x_1 = 1,045$ см. Третий участок — большие расстояния, на которых решетка выглядит как единый точечный заряд величины qN^2 : $E_7 = qN^2/4\pi\epsilon_0 x_7^2$. Отсюда получим $N = \sqrt{E_7/E_1} \cdot x_7/x_1 = 34,79$, а округляя до целых, 35. Приведем также истинные значения $q = 0,111 \cdot 10^{-13}$ Кл, $a = 1$ см, $N = 35$.

5. Предположим сначала, что колонна вся заполнена идеальным газом из N молекул и вычислим в этом случае число молекул в верхнем и нижнем отсеках. Запишем уравнение состояния газа в верхнем отсеке: $p_1 Sh = kTN_1$, здесь S — площадь колонны, p_1 — давление в верхнем отсеке, N — число молекул в нем. Аналогичное соотношение можно записать и для нижнего отсека: $p_2 Sh = kTN_2$. Разница давлений в верхнем и нижнем отсеках удерживает столб молекул в среднем отсеке. Отсюда получаем $(p_1 - p_2)S = m(N - N_1 - N_2)g = mNg$, поскольку $N \gg N_{1,2}$. Соберем результаты вместе: $T = mghN/k(N_1 - N_2)$. А теперь вернемся к исходной задаче. Поскольку идеальный газ сильно разрежен, то можно пренебречь столкновением между молекулами, поэтому доля времени, проводимая отдельной молекулой в соответствующем сосуде, совпадает с отношением $N_{1,2}/N$. Теперь можно легко найти, что $T = 380$ К.

1990 год

1. При условии $v_0^2 < 2gk_0x_0$ координату кубика найти легко, так как задача сводится к скольжению тела по поверхности с коэффициентом трения k_0 : $x = v_0^2/2gk_0$. Если же $v_0^2 > 2gk_0x_0$, то координату кубика ищем из энергетических соображений: $mv_0^2/2 = A$. Работу силы трения A найдем, вычисляя площадь под кривой зависимости силы трения от координаты. При этом учитываем, что уравнение прямолинейного участка имеет следующий вид:

$$k = k_0x/x_0. \text{ Тогда } A = mg(k_0x^2/x_0 + k_0x_0)/2. \text{ Окончательно } x = x_0\sqrt{v^2/gk_0x_0}.$$

2. Горизонтальная компонента скорости шарика при всех ударах не изменяется, а вертикальная падает в $\sqrt{2}$ раз. Поскольку между ударами о плоскость шарик находится в воздухе время $t = 2v_y/g$, то полное время движения шарика представляет собой сумму $t = 2v_{0y} [1 + (1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})^2 + \dots]/g = 2v_{0y}/g(1 - 1/\sqrt{2})$. Мы применили выражение для суммы геометрической прогрессии. Дальность полета S находим из $S = v_x t$. При бросании под углом 45° $v_x = v_{0y} = v/\sqrt{2}$. Окончательно $S = v/g(1 - 1/\sqrt{2}) \approx 0,35$ м.

3. Рассмотрим сначала следующую ситуацию: имеется неподвижный шар массы M , на который со скоростью v налетает шар массы m . Анализируя ее стандартным методом с использованием законов сохранения импульса и энергии, нетрудно найти, что скорость шара массы M после удара будет $V = 2v/(1 + m/M)$. Вернемся теперь к исходной задаче. После удара внешнего шарика об оболочку она получит скорость V . Итак, относительная скорость внутреннего шарика и оболочки равна V . Заметим, что при ударах внутреннего шарика и оболочки их относительная скорость измениться не может. Действительно, рассмотрим упругое центральное соударение двух тел в системе центра масс. Поскольку суммарный импульс в такой системе до и после удара равен нулю, то оба тела при ударе меняют скорости на противоположные. Соответственно, относительная скорость по величине не меняется. Но тогда ясно, что период движения внутреннего шарика есть $T = 4R/V = 2R(1 + m/M)/v$.

4. Ясно, что в сосуде содержится $3/4$ общей массы газа, а в оболочке — $1/4$ ее часть. Запишем уравнения состояния газа в сосуде и в оболочке во втором случае, когда нагрет газ в оболочке: $pV/2 = 3\nu RT_0/4$, $(p + \Delta p) \cdot V/2 = \nu RT_1/4$. Здесь p — давление газа в сосуде, а Δp — избыточное давление, кото-

рое создает натянутая резина оболочки. Аналогичные соотношения можно записать и для третьей ситуации, когда газ в сосуде охлажден до некоторой температуры T_x : $p_1 V/2 = 3 \nu R T_x /4$, $(p_1 + \Delta p) V/2 = \nu R T_0 /4$. Здесь p_1 — новое значение давления газа в сосуде, а величина Δp не изменилась, так как оболочка растянута на ту же величину. Вычтем из первого из полученных уравнений второе, а из третьего — четвертое: $\Delta p V/2 = \nu R (3T_0/4 - T_1/4)$ и $\Delta p V/2 = \nu R (3T_x/4 - T_0/4)$. Приравняв правые части этих уравнений, получим для искомой температуры: $T_x = (4T_0 - T_1)/3$.

5. Из соображений симметрии ясно, что система зарядов по мере своей эволюции будет сохранять форму правильного шестиугольника. Рассмотрим две такие геометрически подобные конфигурации системы. Из соображений размерности очевидно, что электростатическая энергия системы W зависит от геометрического размера l по закону $W = C/l$, где C — постоянная для данной конфигурации зарядов. Используя этот результат, запишем закон сохранения энергии для всех трех состояний: $W + v_0^2/2 = 2W + m(v_0/2)^2 = nW$. Решая эту систему уравнений, получим: $n = 7/3$. Поскольку $W = C/l$, а первоначальное расстояние между частицами $l = 1$ м, то отсюда следует, что частицы сблизятся до расстояния $3/7$ м.

1992 год

1. Работа газа при постоянном давлении $A = p(V_2 - V_1)$. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона (температура постоянна):

$$pV_2 = \frac{m_2}{M} RT, \quad pV_1 = \frac{m_1}{M} RT. \quad \text{Поэтому} \quad A = \frac{m_2 - m_1}{M} RT \quad \text{Отсюда находим}$$

изменение массы газа $\Delta m = MA/RT = 4,4$ кг.

2. Для того чтобы электрон мог пролететь сквозь данную систему зарядов, его кинетическая энергия на выходе (в средней точке N между C и D) должна быть отличной от нуля: $mv^2/2 = e\varphi(N) \geq 0$. Иными словами, потенциал точки N должен быть неотрицательным. Согласно принципу суперпозиции:

$$\varphi(N) = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} - \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 a} \geq 0$$

Следовательно, $Q \geq \sqrt{5}q$.

3. Перед первым открытием клапана давление в первом отсеке $2p$, температура $2T$. При открытом клапане температура выравнивается до величины $T_2 = (2T + T)/2 = 3T/2$. Перед вторым открытием клапана давление в первом отсеке $5p/2$, температура $5T/2$. После установления теплового равновесия температура становится равной $2T$. Перед третьим открытием клапана давление равно $3p$, температура $3T$. После третьего закрытия клапана температура составляет $5T/2$. Перед четвертым открытием клапана температура в первом отсеке $7T/2$, а после того, как клапан закроется в четвертый раз температура будет равной $3T$.

4. Применяя к анализу упругого столкновения седьмого и первого шаров законы сохранения импульса и механической энергии приходим к выводу, что их скорости после удара взаимно перпендикулярны, причем скорость седьмого шара станет равной $v_1 = v \cdot \cos 60^\circ$. После столкновения со вторым шаром $v_2 = v_1 \cdot \cos 60^\circ = v \cdot (\cos 60^\circ)^2$. После третьего столкновения $v_3 = v_2 \cdot \cos 60^\circ = v \cdot (\cos 60^\circ)^3$ и т. д. Наконец, после столкновения с шестым шаром, седьмой будет иметь скорость $v_6 = v_5 \cdot \cos 60^\circ = v \cdot (\cos 60^\circ)^6 = v/64$.

5. Поскольку магнитное поле работы не совершает, перед соударением в точке B обе частицы имеют одинаковые по модулю скорости $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$. Так как после соударения первая частица летит по горизонтали, то для ее скорости v_1' в этот момент выполняется условие баланса силы тяжести и силы Лоренца: $Mg = QBv_1' \Rightarrow v_1' = \frac{Mg}{QB}$. Из закона сохранения

импульса частиц при соударении в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления получаем:

$$Mv_1 = Mv_1' + mu_x,$$

$$mv_2 = mu_y,$$

где u_x и u_y — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости второй частицы после удара. Из этих уравнений находим, что $u_y = v_2$ и

$m = \frac{M(v_1 - v_1')}{u_x}$. Вторая частица движется в однородном поле силы тяжести, поэтому для полного времени ее движения от C до E имеем: $t_{CE} = t_{CB} + t_{BE}$. Отсюда для времени движения от B до E получаем $t_{BE} = t_{CE} - t_{CB}$, где

$l = u_x \cdot t_{BE}$, $t_{CE} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, $t_{CB} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Следовательно, $u_x = \frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2H} - \sqrt{2h}}$ и для

массы второй частицы получаем следующее выражение:

$$m = M \frac{\left(\sqrt{2gh} + \frac{Mg}{QB}\right)(\sqrt{2H} - \sqrt{2h})}{l\sqrt{g}}.$$

1993 год

1. Записав условие равенства сил, действующих на контейнер, получим выражение для величины силы сопротивления: $F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Сила сопротивления для контейнеров одинакова, поскольку определяется лишь их формой и скоростью. Поэтому $m_1 g \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = m_2 g \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Если баржа изменит скорость, то изменятся величины углов: $m_1 g \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = m_2 g \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$. Таким образом $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1$. По условию $\varphi_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$. Поэтому искомый угол равен $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(1/3)$.

2. В момент отрыва пружина не деформирована. Записав закон сохранения энергии и импульса, считая что два левых кубика образуют "тело" массы $2M$, получим: $v = \sqrt{k/6M} \cdot \Delta x$.

3. Суммарное поле является суперпозицией полей, создаваемых каждой плоскостью. Оно однородно, направлено под углом 45° горизонтали и равно по величине $E = \sigma \epsilon_0 / \sqrt{2}$. В этом поле заряд движется с ускорением $a = qE/m$ точно так же, как тело, брошенное под углом 45° к горизонту. Поэтому заряд пересечет линию AB в точке, отстоящей от точки старта на расстоянии $l = v^2 / a = mv^2 \epsilon_0 / \sqrt{2} \cdot 2 / q\sigma$.

4. Сопротивление между точками BD легко определить, если обратить внимание, что по "средним" проволочкам при таком подключении ток не идет. Поэтому $R_{BD} = (N+1)r/2$, где r – сопротивление отдельной проволочки. Рассмотрим теперь случай, когда измерительный прибор подключен к точкам AC . Обозначим через R_N сопротивление рамки, составленной из N звеньев. Нетрудно получить, что рамка, составленная всего из одного звена, имеет сопротивление $R_1 = 0,75r$, рамка, составленная из 2 звеньев — $R_2 = 11r/15 = 0,73r$ и т.д. Сопротивление R_{N+1} рамки, составленной из $N+1$ звеньев вычисляется по следующей формуле:

$$R_{N+1} = (2r + R_N)r / (3r + R_N).$$

Из этого соотношения легко определяется сопротивление рамки, содержащей бесконечное число элементов. Для этого следует подставить в него $R_{N+1} = R_N = R_\infty$. Решая квадратное уравнение, получим, что $R_\infty = (\sqrt{3} - 1) \cdot r = 0,72r$. Таким образом, сопротивление рамки между точками AC практически не зависит от числа звеньев и составляет $R_{AC} = R_\infty = 0,72r$. Используя численные значения, приведенные в задаче, получаем, что $r = 5 \text{ Ом}$. Но тогда из $R_{BD} = (N+1)r/2$ следует, что $N = 9$. Итак, рамка составлена из большого числа звеньев, когда формулой $R_{AC} = R_\infty$ заведомо можно пользоваться.

5. Отметим, что в первом положении в верхней части левого сосуда находилась некоторая масса газа m , а в нижней — масса $2m$. В правом сосуда находилась масса газа $4m$. После того, как верхний кран открыли, а нижний закрыли, то образовалось два объема газа с массами $5m$ и $2m$ соответственно. Запишем для них уравнение состояния:

$$P_1 = 5RTm/V_1 = 5RTm/\mu S(2H-x),$$

$$P_2 = 2RTm/V_2 = 2RTm/\mu Sx.$$

Мы учли, что $V_1 = S(2H-x)$ и $V_2 = Sx$, где S — площадь поршня, а x — новая его координата.

Разность давлений P_2 и P_1 определяется массой поршня. Известно, что первоначально давление над поршнем P_0 в два раза меньше, чем под поршнем. Поэтому можно записать, что

$$P_2 - P_1 = P_0.$$

Давление P_0 создано массой газа m , занимавшей половину левого сосуда. Поэтому

$$P_0 = 2RTm/\mu SH.$$

Из полученных четырех уравнений получаем:

$$2/x - 5/(2H-x) = 2/H.$$

Это соотношение приводится к квадратному уравнению

$$2x^2 - 11Hx + 4H^2 = 0,$$

решая которое, получим:

$$x = (11 - \sqrt{89})H/4.$$

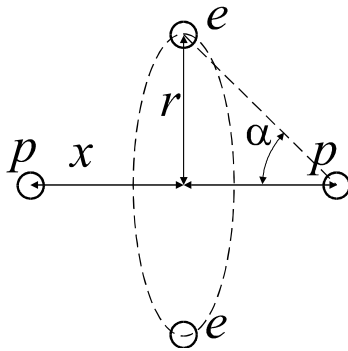
1994 год

Рис. 70

1. Из условия равновесия протона в молекуле (см. рис 70.) получаем:

$$F_p = 2F_e \cos \alpha, \quad (1)$$

$$F_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2x)^2},$$

$$\text{где } F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(r^2 + x^2)},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Собирая все в (1), найдем, что $x = r/\sqrt{3}$. Отсюда получаем расстояние между протонами $l = 2x \approx 7,39 \cdot 10^{-11}$ м.

2. По закону сохранения энергии, чтобы верхний (пятый) маятник смог совершить полный оборот, в нижней точке ему нужно сообщить скорость $v_{50} = \sqrt{2gl}$. Эту скорость он получает при неупругом соударении с четвертым маятником в верхней точке траектории последнего. При неупругом соударении два одинаковых шара свои скорости делят поровну. Поэтому, четвертый шар перед столкновением с пятым должен иметь скорость $2v_{50}$. Следовательно, в нижней точке ему нужно сообщить начальную скорость v_{40} , Определяемую из сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{40}^2}{2} = \frac{m(2v_{50})^2}{2} + mg2l.$$

Отсюда, зная v_{50} , находим, что $v_{40} = 2\sqrt{(4+1)gl} = 2\sqrt{5gl}$. Проводя аналогичные рассуждения для нижерасположенных маятников, получим:

$$v_{30} = 2\sqrt{(4 \cdot 5 + 1)gl} = 2\sqrt{21gl},$$

$$v_{20} = 2\sqrt{(4 \cdot 21 + 1)gl} = 2\sqrt{85gl},$$

$$v_{10} = 2\sqrt{(4 \cdot 85 + 1)gl} = 2\sqrt{341gl}.$$

3. Пусть h — рост наименьшей матрешки, а m — ее масса. Тогда по условию задачи $h(1 + A + A^2) = L$. Масса каждой матрешки пропорциональна объему ее стенок, а значит третьей степени роста: $m_1 = m$, $m_2 = A^3 m$, $m_3 = A^6 m$, $m_4 = A^9 m$. Записав условие равновесия моментов сил тяжести

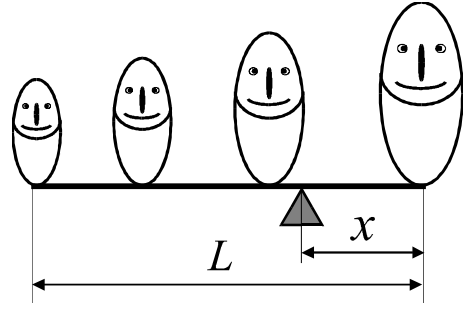


Рис. 71

$$m_4 g x = m_3 g (h_3 - x) + m_2 g (h_3 + h_2 - x) + m_1 g (L - x),$$

найдем положение точки опоры

$$x = \frac{L + h(A^8 + A^5 + A^4)}{(A^9 + A^6 + A^3 + 1)}.$$

Исключив отсюда h , получим решение задачи в виде:

$$x = L \frac{1 + (A^8 + A^5 + A^4) / (1 + A + A^2)}{(A^9 + A^6 + A^3 + 1)}.$$

4. Для достижения равновесия большое колесо повернется на угол α против часовой стрелки, а малое — на угол β по часовой (см. рис. 72). Так как проскальзывания нет, то $\beta = 2\alpha$. Составляя условие равновесия моментов сил в точке контакта F_1 и F_2 ($F_1 = F_2$) и моментов сил тяжести грузов:

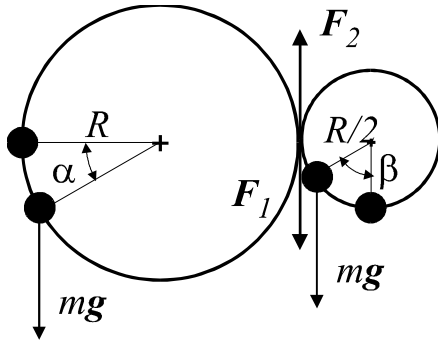


Рис. 72

$$\left. \begin{aligned} F_1 R &= mg \cos \alpha \cdot R, \\ F_2 \frac{R}{2} &= mg \sin(2\alpha) \frac{R}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем: $\cos \alpha = \sin 2\alpha$, или $\cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha) = 0$. Корни этого уравнения:

$\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = \pi/6$. Первый корень соответствует неустойчивому равновесию, второй — устойчивому.

5. После отпускания верхнего поршня он остановится на некоторой высоте x , меньшей высоты большого цилиндра, а нижний поршень опустится до высоты y .

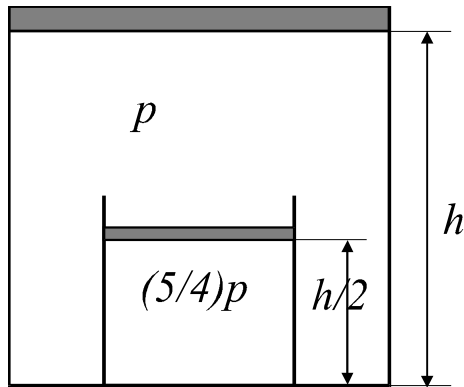


Рис. 73

Условие равновесия нижнего поршня в начальном состоянии

$$(5p/4 - p)S_1 = mg. \quad (1)$$

Условие равновесия малого поршня в конечном состоянии

$$(p_2 - p_3)S_1 = mg. \quad (2)$$

По закону Бойля–Мариотта для газа в нижнем цилиндре

$$p_1 S_1 h/2 = p_2 S_1 y, \quad (3)$$

где $p_1 = 5p/4$,

а для газа в большом цилиндре $pV_0 = p_3 V_3$, (4)

где:

$$V_0 = Sh - S_1 h/2, \quad (5)$$

$$V_3 = Sx - S_1 y. \quad (6)$$

Условие равновесия большого поршня в конечном состоянии

$$mg = (p_3 - p)S. \quad (7)$$

Учитывая, что диаметры поршней отличаются вдвое, имеем: $S = 4S_1$. (8)

Решение приведенной системы уравнений выражается формулами:

$$y = \frac{20}{21} \cdot \frac{h}{2}, \quad x = \frac{673}{357} \cdot \frac{h}{2}.$$

1995 год

Первый тур

1. Обозначим через A и B искомые точки окружности. Пусть R_1 - сопротивление дуги окружности между ними, через R_2 - сопротивление смежной дуги. По формуле параллельного соединения $R_{AB} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Очевидно, что $R_2 = R - R_1$, где $R = 5$ Ом. Отсюда, получаем уравнение: $R_1^2 - 5R = 5$. Его корни: $R_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/2$. $R_1 = 3,62$ Ом, $R_2 = 1,38$ Ом. Следовательно, искомые точки должны делить окружность в отношении $\approx 2,62$.

2. Для капли, свободно упавшей с высоты h , по закону сохранения энергии имеем: $mgh = ml + cm\Delta T$. Отсюда $h = (l + c\Delta T)/g$, где $c = 4,18 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $\lambda = 2,25 \cdot 10^6$ Дж/кг. После подстановки численных значений, найдем, что капля должна упасть с высоты около 272 км. При этом скорость капли в момент приземления должна составить около 2,5 км/с. На самом деле, эта модель слишком идеализирована и сопротивление воздуха сильно скажется на движении капли.

3. По закону сохранения механической энергии: $mv^2/2 = mv_1^2/2 + mgh$, где

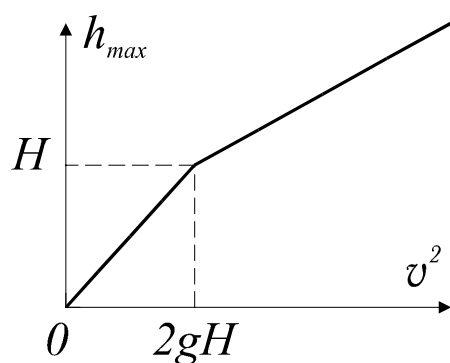


Рис. 74

v_1 – скорость шарика на высоте h . Возможны следующие ситуации:

а) $v^2 < 2gH$ – шарик не вылетит за пределы наклонной плоскости, достигнув высоты $h_{max} = v^2/2g$.

б) $v^2 = 2gH$ – шарик достигнет вершины наклонной плоскости, имея нулевую скорость ($h_{max} = H$).

в) $v^2 > 2gH$ – шарик стартует с вершины наклонной плоскости со скоростью

$v_1 = \sqrt{v^2 - 2gH}$, направленной под углом 45° к горизонту $h_{max} = v^2/4g + H/2$. Полученные результаты на плоскости параметров (v^2, h_{max}) представляются совокупностью двух прямых (см. рис. 74).

4. По закону сохранения механической энергии условие перехода от колебательного движения к вращательному запишется в виде: $mv^2/2 = mg2l$. При $v^2 > 4gl$ происходит вращение, при меньшей скорости – колебания около нижней точки. При прохождении телом верхней точки со скоростью v_1 согласно 2 закону Ньютона $mg + T = mv_1^2/l$, откуда сила натяжения стержня найдем: $T = m(v_1^2/l - g)$. При $v_1^2/l > g$ получим, что $T > 0$ (стержень растянут). Наоборот, при $v_1^2/l < g$ получим, что $T < 0$ (стержень сжат). Согласно закону сохранения механической энергии $v_1^2 = v^2 - 4gl$. Следовательно, при $v^2 > 5gl$ стержень в верхней точке растянут, при $4gl < v^2 < 5gl$ стержень в верхней точке сжат, при $v^2 < 4gl$ наблюдается колебательное движение.

5. Наносим табличные точки на график (см. рис. 75). Так как для упругих

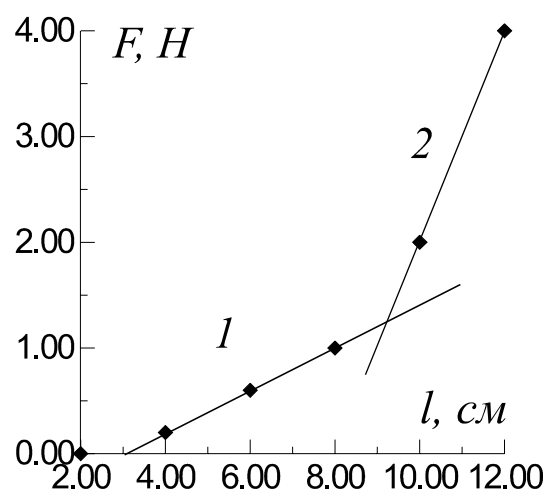


Рис. 75

элементов действует закон Гука, накладываем на точки две прямые 1 и 2. Первая прямая отвечает действию более короткого элемента, вторая - действию обоих элементов. Начальная точка таблицы не попадает на прямые, ибо она соответствует той стадии когда расстояние между точками A и B меньше естественной длины элементов. Коэффициент жесткости первого элемента: $k_1 = 0,4 \text{ Н/2 см} = 0,2 \text{ Н/см}$. Коэффициент же-

сткости параллельно соединенных элементов $k_{1+2} = 2 \text{ Н/2 см} = 1 \text{ Н/см}$. При параллельном соединении жесткости суммируются, поэтому жесткость второго элемента $k_2 = k_{1+2} - k_1 = 1,8 \text{ Н/см}$.

Второй тур

1. Судя по линейному масштабу рисунка четверть длины волны составляет 5 см, поэтому длина звуковой волны равна 20 см. Ее скорость выражается из формулы: $v = l/\Delta t$, где $\Delta t = 0.001 \text{ с}$, а $l = \lambda/4 + n \cdot \lambda/2$, n — неотрицательное целое число. Полагая $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ найдем скорости равные соответственно 50, 150, 250, 300, 350 и 400 м/с. Из приведенных величин свойствам воздуха отвечает 350 м/с, получаемая при $n = 4$.

2. «Полезное» количество теплоты в первом опыте выражается формулой:

$$(P_{\text{ПЛИТЫ}} - P'_{\text{ПОТЕРЬ}}) \cdot t_1 = q \cdot M.$$

Аналогичная величина во втором опыте:

$$(P_{\text{ПЛИТЫ}} - P''_{\text{ПОТЕРЬ}}) \cdot t_2 = \lambda \cdot M + cM\Delta t + q \cdot M.$$

Поскольку средний уровень температуры во втором опыте ниже, чем в первом, выполняется неравенство: $P''_{\text{ПОТЕРЬ}} < P'_{\text{ПОТЕРЬ}}$. Следовательно, $(P_{\text{ПЛИТЫ}} - P'_{\text{ПОТЕРЬ}}) < (P_{\text{ПЛИТЫ}} - P''_{\text{ПОТЕРЬ}})$ и $qM/t_1 < (\lambda \cdot M + cM\Delta t + q \cdot M)/t_2$. Отсюда получаем неравенство: $t_2 < (1 + (\lambda + c\Delta t)/q) \cdot t_1$, которое, после подстановки численных значений приводится к виду $t_2 < 2375 \text{ с}$. Значит, истинное время опыта $t_2 = 2076 \text{ с}$, а неразборчиво написанная цифра является нулем.

3. Для электрической цепи электромотора автомобиля имеем:

$$E = E_{\text{ind}} + J \cdot R. \quad (1)$$

Отсюда $EJ = E_{ind}J + J^2 \cdot R$. Здесь $E_{ind}J = W$ — «полезная» мощность, которая выражается через скорость движения и силу сопротивления: $W = v \cdot F_c$. По условию задачи $F_c = \alpha v$ и $E_{ind} = kv/r$. Поэтому $kvJ/r = \alpha v^2$, и сила тока выразится формулой $J = \alpha v \cdot r/k$. Подставив силу тока вместе с E_{ind} в (1)

$$E = kv/r + R \alpha v \cdot r/k,$$

выразим искомую установившуюся скорость движения электромобиля:

$$v = E/(k/r + \alpha r R/k).$$

4. Мысленно рассечем баллон плоскостью, проходящей через его центр. Раскладывая силы давления газа на составляющие параллельные и перпендикулярные этой плоскости, получим, что с учетом симметрии баллона результирующая сила внутреннего давления будет перпендикулярна выбранной плоскости и может быть вычислена перемножением величины давления газа на площадь проекции внутренней поверхности газа на секущую плоскость. Эта результирующая сила уравнивается силой упругих напряжений в материале стенки баллона: $p \cdot 2\pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Отсюда

$$p = \left[\left(R/r \right)^2 - 1 \right] \cdot \sigma / 2.$$

Эту же величину выражаем из уравнения Менделеева–Клапейрона $p = RT m / \mu V$. Здесь $V = 4\pi r^3 / 3$, μ — молярная масса газа.

По условию задачи $m = M/N$, где $M = \rho 4\pi(R^3 - r^3)/3$ — масса баллона. С

учетом этого $p = RT\rho \left[\left(R/r \right)^3 - 1 \right] / \mu N$. Обозначая искомое отношение радиусов баллона R/r через x и приравнявая правые части выражений давления, получим уравнение относительно x :

$RT\rho(x^3 - 1)/\mu N = \sigma(x^2 - 1)/2$. После сокращения на $(x - 1)$ получим:

$$RT\rho(x^3 - 1)/\mu N = \sigma(x^2 - 1)/2.$$

$$x^2 + x + 1 = \frac{\mu N \sigma}{2RT\rho}(x + 1),$$

которое является квадратным уравнением $x^2 - \beta x - \beta = 0$, где применено обозначение: $\beta = ((\mu N \sigma / 2RT\rho) - 1)$. Корень квадратного уравнения, отвечающий физическому смыслу задачи ($x > 1$), выражается формулой:

$x = \beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 + \beta}$. Это решение имеет смысл при $\beta > 0.5$, что и накладывает ограничения на значения параметров условий задачи.

5. Давление в точке A выражается известной формулой: $p = \rho g H$, где H — высота уровня жидкости в трубе. Пусть M — масса жидкости в трубе. Выразим ее через H . $M = \rho(V_1 + V_2)$, где $V_1 = \pi d^2 H / 4 \cos \varphi$ — объем жидкости в тонком колене, $V_2 = \pi d^2 H / \sin \varphi$ — объем в толстом колене. Выражая высоту уровня жидкости H через массу M и получаем следующее выражение для давления в точке A :

$$p = \frac{gM}{\pi d^2} \frac{2 \sin 2\varphi}{\sin \varphi + 4 \cos \varphi}$$

Исследовав эту функцию, получаем, что максимальное давление в точке A получается при $\varphi = \arctg(\sqrt[3]{1/4})$.

1996 год

1. Электродвижущая сила элемента определяется электрохимическими свойствами его материалов и не зависит от геометрических размеров ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$). Внутреннее сопротивление прямо пропорционально расстоянию между электродами и обратно пропорционально их площади:

$$r_2 = \rho \frac{l_2}{S_2} = \rho \frac{2l_1}{4S_1} = \frac{1}{2} r_1. \text{ Эффективное время работы элемента на постоянную}$$

нагрузку зависит от количества активных веществ, которое в свою очередь пропорционально объему элемента. Поэтому $T_2 = k \cdot l_2^3 = k \cdot (2l_1)^3 = 8kl_1^3 = 8T_1$.

2. Время движения гантельки до столкновения ее верхнего шарика с плоскостью AB : $t_1 = L/v$. Время поворота гантельки против часовой стрелки на угол $\pi/2$ до столкновения другого ее шарика с верхней стенкой тоннеля:

$t_2 = (\pi/2)/\omega = \pi l/4v$. Время поступательного движения до плоскости симметрии: $t_3 = l/2v$. Далее симметрично повторяются три перечисленные фазы движения. Поэтому общее время гантельки $T = 2(t_1 + t_2 + t_3)$.

3. Повторяя рассуждения, аналогичные решению задачи 4 второго тура 1995 года, находим напряжение разрывающее первый баллон:

$$F_{\text{рез1}} = F_{\text{внутр1}} - F_{\text{атм1}} = 4p_0 2h6h - p_0 4h8h = 16p_0 h^2.$$

Эта сила вызовет напряжение σ в месте склейки: $F_{\text{рез1}} = \sigma S_{\text{скл}} = \sigma 20h^2$.

Отсюда находим, что $\sigma = 4p_0/5$. Такое же напряжение будет действовать в месте склейки и при разрыве второго баллона. Для него имеем:

$$F_{\text{рез2}} = F_{\text{внутр2}} - F_{\text{атм2}} = p_x \pi h^2 - p_0 \pi 4h^2 = \pi h^2 (p_x - 4p_0) = \sigma \pi (4h^2 - h^2) = \sigma \pi 3h^2$$

Итак, $p_x - 4p_0 = 4p_0 \cdot 3/5$. Поэтому $p_x = 32p_0/5 = 6,4p_0$.

4. В процессе колебаний центр масс системы останется неподвижным. При смещении любого поршня на Δx возникает возвращающая сила

$$F_x = -2k\Delta x - (p_2 - p_1)S,$$

где p_1 — давление в центральном отсеке, p_2 — давление в том крайнем отсеке, где сместился поршень. По закону Бойля–Мариотта

$$p_0 S l/3 = p_1 S ((l/3) + 2\Delta x) = p_2 S ((l/3) - \Delta x).$$

Отсюда получаем, что

$$p_2 - p_1 = p_0 \left(\frac{1}{1 - 3\Delta x/l} - \frac{1}{1 + 6\Delta x/l} \right) \approx p_0 \left(1 + \frac{3\Delta x}{l} - 1 + \frac{6\Delta x}{l} \right) = \frac{p_0 9\Delta x}{l}.$$

Здесь было применено известное приближение: $1/(1 \pm \alpha) \approx 1 \mp \alpha$. Итак, результирующая сила, возникающая при смещении поршня, оказывается пропорциональной величине этого смещения (квазиупругая сила):

$$F_x = -(2k + 9p_0 S/l)\Delta x.$$

Составляя уравнение движения поршня по второму закону Ньютона

$$M a_x = -(2k + 9p_0 S/l)\Delta x$$

и сравнивая его с уравнением гармонического осциллятора $a_x = -\omega^2 \Delta x$, выражаем круговую частоту собственных колебаний поршня:

$$\omega = \sqrt{(2k + 9p_0 S/l)/M}.$$

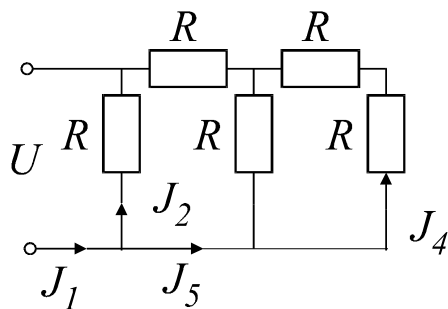
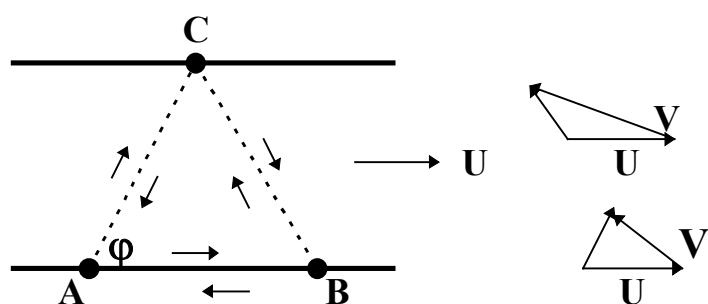


Рис. 76

5. Так как сопротивление амперметров мало, точки, к которым они подключены, можно соединить в один узел. При этом получим эквивалентную схему, показанную на рис. 76. Ток через первый амперметр равен J_1 , через второй — J_2 , а через третий $J_3 = J_1 - J_4$. Ток J_2 вычисляется по закону Ома: $J_2 = U/R = 0,1$ А. Эквивалентное сопротивление четырех рези-

сторгов, размещенных в правой части схемы составляет $5R/3$ (последовательно – параллельное соединение). С учетом этого $J_5 = 3U/5R = 0,06$ А. По правилу Кирхгофа $J_1 = J_2 + J_5$. Далее, $J_4 = (J_5 \cdot 2R/3)/2R = U/5R = 0,02$ А. Наконец, $J_3 = J_1 - J_4 = 0,14$ А. Итак, первый амперметр показывает 0,16 А, второй 0,1 А и третий 0,14 А.

1997 год



1. Время движения по маршруту $ABCA$:

$$T_{ABCA} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CA},$$

если обозначить скорость лодки в стоячей воде V , скорость течения U , а расстояние AB через L , то

$$T_{ABCA} = \frac{L}{V+U} + 2 \frac{L}{2V_1 \cos \varphi},$$

где V_1 – скорость при движении по маршрутам BC и CA . Эту скорость можно найти из треугольника скоростей по теореме косинусов

$$V^2 = U^2 + V_1^2 + 2UV_1 \cos \varphi \Rightarrow V_1^2 + 2V_1 U \cos \varphi + (U^2 - V^2) = 0,$$

откуда $V_1 = -U \cos \varphi + \sqrt{V^2 - U^2 \sin^2 \varphi}$. Время движения по маршруту $ACBA$ будет равно

$$T_{ACBA} = \frac{L}{V-U} + 2 \frac{L}{2V_2 \cos \varphi},$$

где V_2 – скорость при движении по маршрутам AC и CB . Эта скорость находится также как и скорость V_1 :

$$V^2 = U^2 + V_2^2 - 2UV_2 \cos \varphi \Rightarrow V_2^2 - 2V_2 U \cos \varphi + (U^2 - V^2) = 0 \Rightarrow$$

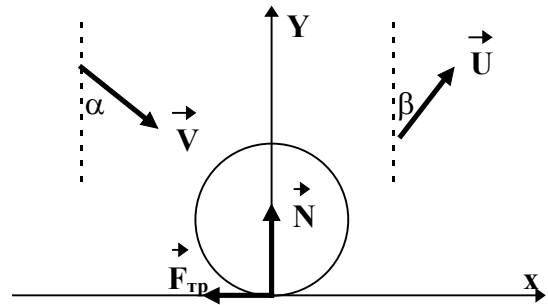
$$V_2 = U \cos \varphi + \sqrt{V^2 - U^2 \sin^2 \varphi}$$

Составив разность времен движения по этим двум маршрутам, получим нуль. Это показывает, что время движения не зависит от выбора маршрута.

Исследуем теперь зависимость времени движения от соотношения скоростей лодки в стоячей воде и течения реки. Рассмотрим маршрут $ABCA$. На участке AB никаких ограничений на соотношение скоростей нет.

На участках BC и CA из условия, что суммарная скорость должна быть направлена по линии BC или CA , следует $V > U$, в этом случае и подкоренное выражение тоже больше нуля. Если же $V < U$, то нельзя пересечь реку к пункту, расположенному выше по течению реки. Для маршрута $ACBA$ на участке BA при $V < U$ нельзя доплыть из деревни B в деревню A , время этого движения не определено (деление на ноль). При движении по маршрутам AC и CB накладывается ограничение $V > U \sin \varphi$, минимальной скорости, при которой можно плыть по заданному маршруту. Однако все ограничения перекрываются требованием $V > U$, при котором путешествие по любому маршруту вообще возможно.

2. При столкновении кольца со стенкой возможна реализация двух случаев: а) за время удара кольцо проскальзывает; б) кольцо начинает катиться. Рассмотрим случай а). Так как за время удара кольцо не набирает достаточной угловой скорости, чтобы началось чистое качение, то в течение всего времени удара на него вдоль оси X действует сила трения скольжения $F_{mp} = kN$, где N – сила нормального давления кольца на стенку. Тогда для изменения компонент импульса вдоль осей X и Y и изменения угловой скорости $\Delta\omega$ можно записать



$$y : \quad N\Delta t = m\Delta V_y,$$

$$x : \quad -kN\Delta t = m\Delta V_x,$$

$$kN\Delta t = mR^2\Delta\omega.$$

Если считать, что сила давления зависит только от взаимного положения стенки и кольца, (удар упругий), то за время удара Y -компонента скорости изменит знак. Поэтому

$$V \cos \alpha = U \cos \beta \Rightarrow \Delta V_y = U \cos \beta - (-V \cos \alpha) = 2V \cos \alpha.$$

Тогда из первого и третьего уравнений получаем

$$\Delta\omega = \frac{2kV \cos \alpha}{R},$$

из второго и третьего уравнения имеем

$$\Delta V_x = -\Delta\omega R = -2kV \cos \alpha.$$

Скорость центра кольца после отскока будет равна

$$U_x = V_x + \Delta V_x = V \sin \alpha - 2kV \cos \alpha .$$

Условием, что в момент отрыва кольца будет продолжаться скольжение, является неравенство

$$U_x > \Delta \omega R \Rightarrow V \sin \alpha - 2kV \cos \alpha > 2kV \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 4k .$$

Определим теперь угол, под которым отскочит кольцо

$$\left. \begin{array}{l} U \cos \beta = V \cos \alpha \\ U \sin \beta = V \sin \alpha - 2kV \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2k$$

Рассмотри теперь случай б), когда в некоторый момент времени в процессе удара кольцо перешло в чистое качение. Это происходит при выполнении условия $V_x = \Delta \omega R$. В этом случае точка кольца, касающаяся стенки, имеет нулевую скорость. При этом сила трения скольжения перестает действовать и дальнейшее увеличение угловой скорости и уменьшение скорости центра кольца по оси X прекращается. При этом скорость по оси Y по прежнему изменяет только направление. Поэтому можем записать два уравнения изменения импульса и момента импульса по оси X :

$$\begin{aligned} m \Delta V_x &= -k F_{\text{тр}} \Delta t, \\ m R^2 \Delta \omega &= k R F_{\text{тр}} \Delta t, \end{aligned}$$

где в данном случае $F_{\text{тр}} \Delta t$ – импульс силы трения скольжения за время удара. Из этих уравнений получаем

$$\Delta \omega = -\frac{\Delta V_x}{R}.$$

Кроме того, после удара должно выполняться условие $V_x = \Delta \omega R$, то есть

$$V \sin \alpha - \Delta \omega R = \Delta \omega R \Rightarrow \Delta \omega = \frac{V \sin \alpha}{2R}.$$

Ответ: Угловая скорость вращения кольца равна

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{при } \operatorname{tg} \alpha < 4k & \Delta \omega = \frac{V \sin \alpha}{2R}, \\ \text{при } \operatorname{tg} \alpha > 4k & \Delta \omega = \frac{2kV \cos \alpha}{R}. \end{array} \right.$$

3. Пусть x – расстояние между пластинами конденсатора. Уравнение состояния газа между ними

$$PxS = RT \quad (1)$$

Сила, действующая на поршень в направлении x

$$F = (P - P_0)S - EQ, \quad (2)$$

где E – напряженность электрического поля

$$E = U/x. \quad (3)$$

Q – заряд конденсатора, который можно считать плоским,

$$Q = UC = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x} U. \quad (4)$$

С учетом (1), (3) и (4) сила из (2) явно выражается через x :

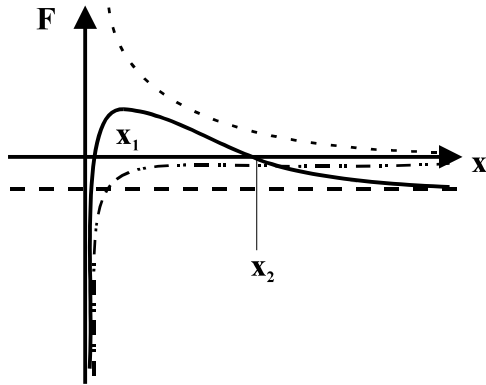
$$F(x) = \frac{RT}{x} - P_0 S - \varepsilon\varepsilon_0 S \left(\frac{U}{x}\right)^2. \quad (5)$$

Условием равновесия пластин является равенство нулю приложенной к ним силы и сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \frac{RT}{P_0 S} x + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{P_0} = 0. \quad (6)$$

Для воздуха относительная диэлектрическая проницаемость равна единице, поэтому корни уравнения (6) можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{RT}{2P_0 S} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2}} \right). \quad (7)$$



Если нарисовать график зависимости силы от расстояния между пластинами, то видно, что x_1 отвечает неустойчивому положению равновесия, а x_2 — устойчивому.

Ответ:

$$x_{1,2} = \frac{RT}{2P_0 S} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2}} \right) \quad (8)$$

Анализ и оценки.

При комнатной температуре и площади пластин $S = 1 \text{ м}^2$ выражение под корнем

$$\alpha = \frac{4\varepsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2} = \frac{4 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \cdot U^2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1}{(8,314 \cdot 300)^2} \approx 0,576 \cdot 10^{-12} U^2.$$

Видно, что для того, чтобы это выражение было порядка единицы, необходимо $U \sim 10^6 \text{ В}$. Такие напряжения нереальны ввиду электрического пробоя воздуха. Увеличение площади пластин не имеет смысла, а уменьшение температуры невозможно из-за сжижения газа.

Вывод: Величина α много меньше единице при всех разумных параметрах и тогда ей можно пренебречь по сравнению с единицей, а значит и действием электрических сил по сравнению с силами давления газа. В этом случае из (8) получаем

$$x \cong \frac{RT}{P_0 S},$$

откуда следует, что при изменении температуры на один градус изменение расстояния между пластинами составляет $\Delta x = 82$ мкм. Измерять такие малые изменения размера значительно хуже, чем пользоваться обычным ртутным или спиртовым термометром, кроме того, цена деления такого "термометра" существенно зависит от величины атмосферного давления.

Общая оценка проекта "термометра" — отрицательная.

4. Определим плотности ядра планеты и самой планеты, учитывая, что объем вещества планеты равен полному объему без объема ядра

$$\rho_1 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{7\pi R^3}$$

$$\rho_2 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{\pi R^3}$$

Очевидно, что максимальное и минимальное значения ускорения свободного падения находятся в точках планеты, расположенных на концах диаметра, проходящего через центры планеты и ядра. В этом случае ускорения свободного падения равны

$$\begin{aligned}
g_1 &= \gamma \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} \right) = \gamma \left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{9 R^2} \right) = \frac{8\gamma V_2}{9R^2} (7\rho_1 + 2\rho_2) = \\
&= \frac{\gamma \pi R^3 / 6}{9R^2} 72 \frac{M}{\pi R^3} = \frac{4}{3} \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{4}{3} g_0 \approx 1,33 g_0 \approx 13,07 \\
g_2 &= \gamma \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{5}{4}R\right)^2} \right) = \gamma \left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{25 R^2} \right) = \frac{\gamma 8V_2}{25R^2} (23\rho_1 + 2\rho_2) = \\
&= \frac{8\gamma V_2}{25R^2} (23\rho_1 + 14\rho_1) = \frac{296\gamma V_2 \rho_1}{25R^2} = \frac{296\gamma \frac{\pi R^3}{6} \frac{3M}{7\pi R^3}}{25R^2} = \frac{148}{175} \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{148}{175} g_0
\end{aligned}$$

Ответ: Ускорение силы тяжести изменяется от 8,29 м/с² до 13,07 м/с².

5. Рассмотрим движение шарика более подробно: удар о внутреннюю поверхность сферы абсолютно упругий, поэтому скорость шарика не меняется по величине; в этом случае движение шарика можно рассматривать как движение под углом к горизонту под разными углами. Если провести хорду, соединяющую точки удара, то шарик движется по одной траектории под углом к горизонту α , а по другой под углом β . Относительно радиуса, проведенного в точку удара, угол падения шарика γ равен углу отражения. Если обозначить угол между радиусом и хордой φ , то будет выполняться соотношение

$$\alpha = \varphi - \gamma; \quad \beta = \varphi + \gamma \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Так дальность полета в обоих случаях одинакова, то

$$\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{V^2 \sin 2\beta}{g} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \sin 2\beta \quad \Rightarrow \quad 2\beta = \pi - 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Отсюда следует, что представленное в условиях движение существует в единственном случае, когда

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad L = R\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{gR\sqrt{2}}{V^2}.$$

Определим период движения шарика

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2V \sin \alpha}{g} + \frac{2V \sin \beta}{g} = \frac{2V}{g} (\sin \alpha + \cos \alpha),$$

Используя соотношение $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin 2\alpha + 1$, можно получить выражение для периода движения

$$T = \frac{2V}{g} \sqrt{1 + \frac{gR\sqrt{2}}{V^2}}.$$

По условию задачи необходимо найти период движения в зависимости от энергии шарика. Если считать в точке удара потенциальную энергию равной нулю, то полная энергия шарика равна кинетической энергии в момент удара

$$E = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Тогда окончательно выражение для периода движения будет иметь вид

$$T = \frac{2\sqrt{2E}}{g\sqrt{m}} \sqrt{1 + \frac{mgR\sqrt{2}}{2E}}.$$

При анализе характера зависимости периода от энергии необходимо рассмотреть область определения этой зависимости. Во-первых, существует ограничение на энергию снизу, то есть рассматриваемое движение возможно только начиная с некоторой минимальной энергии. Это ограничение связано с необходимостью преодолеть расстояние L . Как известно, минимальная скорость, при которой тело пролетит заданное расстояние соответствует скорости при движении под углом 45°

$$L = \frac{V^2}{g} \Rightarrow V^2 = gR\sqrt{2} \Rightarrow E_{\min} = \frac{mgR\sqrt{2}}{2}.$$

Кроме того, при столкновении шарика с верхней точкой поверхности сферы он уже не вернется в исходные точки, поэтому максимальная высота полета не может превышать величину

$$H = R \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{V^2 \sin^2 \beta}{2g} \Rightarrow \frac{gR\sqrt{2}}{V^2} (1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{mgR\sqrt{2}}{E} (1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} \Rightarrow \frac{mgR\sqrt{2}}{E} (1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{1 + \frac{mgR\sqrt{2}}{2E}}$$

Учтем выражение для $E_{\min}$, и введем обозначение

$$\begin{aligned}
k = \frac{E_{\min}}{E} &\Rightarrow 2k(1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{1 + k} \Rightarrow \\
4k^2(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 4k(1 + \sqrt{2}) + 1 &= 1 + k \Rightarrow \\
4k^2(3 + 2\sqrt{2}) - k(5 + \sqrt{2}) &= 0 \Rightarrow \\
k = \frac{5 + \sqrt{2}}{4(3 + 2\sqrt{2})} \approx 0,275 &\Rightarrow E_{\max} \approx 3,635 E_{\min}.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned}
\frac{mgR}{\sqrt{2}} < E < 3,635 \frac{mgR}{\sqrt{2}}, \\
T = \frac{2\sqrt{2E}}{g\sqrt{m}} \sqrt{1 + \frac{mgR\sqrt{2}}{2E}}.
\end{aligned}$$

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Условия задач 1975-1997 годы.	4
Ответы и решения 1975-1997 годы	33